Korollar 3.8.3 (Winkelverdoppelungsformeln)

Für $z \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\cos(2z) = \cos(z)^2 - \sin(z)^2$$

$$\sin(2z) = 2 \cdot \sin(z)\cos(z)$$

Kurzer Einschub:

Die Exponentialfunktion auf $i\mathbb{R}$ und das Bogenmass

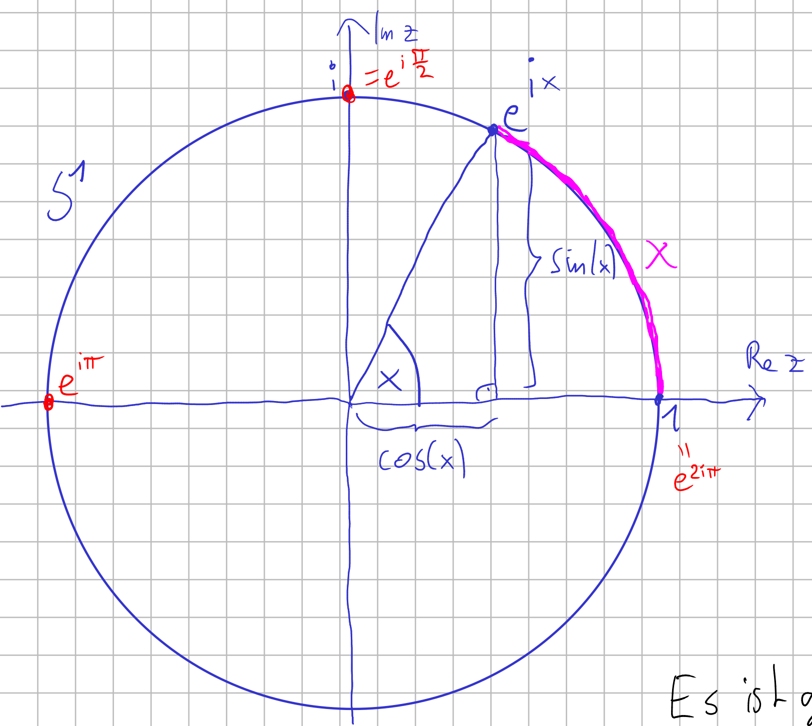
Für $x \in \mathbb{R}$ sind $\cos(x), \sin(x) \in \mathbb{R}$ und

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x) \qquad \overline{e^{ix}} = \cos(x) - i\sin(x) = e^{-ix}$$

$$\Rightarrow |e^{ix}| = \sqrt{\cos(x)^2 + \sin(x)^2} = 1$$

d.h. e^{ix} bzw. $\begin{pmatrix}\cos(x)\\ \sin(x)\end{pmatrix}$ liegen in $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$

$$\cong \left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \left\|\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right\| = 1\right\}$$



... Kreis mit Mittelpunkt 0 und Radius 1, "Einheitskreis"

x ist ein Mass für den Winkel zwischen positiver Realteilachse und dem Vektor e^{ix}

... Winkel im Bogenmass (Radiant)

Es ist genau die Länge des Kreisbogens von 1 bis e^{ix}

Die Funktion $\mathrm{cis}: \mathbb{R} \to S^1$, $x \mapsto e^{ix}$, "wickelt die Zahlengerade auf den Einheitskreis S^1 auf. (Längentreu, und unendlich oft)

3.9 Die Kreiszahl π

Satz 3.9.1

$(\sin(0) = 0)$

Die Sinusfunktion hat in $(0, \infty)$ mindestens eine Nullstelle.

Definiere

$$\pi := \inf\{t > 0 \mid \sin(t) = 0\}$$

Dann gilt:

(1) $\sin(\pi) = 0$, $\pi \in (2, 4)$ $\qquad (\pi = 3{,}14\ldots)$

(2) $\forall x \in (0, \pi): \sin(x) > 0$

(3) $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$

Vor dem Beweis ein paar Überlegungen von von unabhängigem Interesse

Für $x \neq 0$ ist die Reihe

$$\sin(x) = \underbrace{x}_{a_1} - \underbrace{\frac{x^3}{3!}}_{a_2} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} \mp \ldots$$

alternierend!

Satz 2.7.12 (Leibniz 1682).
Sei $(a_n)_{n\geqslant 1}$ monoton fallend mit $a_n \geqslant 0 \quad \forall n \geqslant 1$ und $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Dann konvergiert

$$S := \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k$$

und es gilt:

$$a_1 - a_2 \leqslant S \leqslant a_1$$

Sind die Terme der alternierenden Reihe monoton fallend?

$$\frac{x^3}{3!} \le x \;? \quad \Leftrightarrow \quad x^2 \le 6 \qquad (x>0)$$

$$\frac{x^5}{5!} \le \frac{x^3}{3!} \;? \quad \Leftrightarrow \quad x^2 \le \frac{5!}{3!} = 4\cdot 5 = 20$$

Allgemein: $$\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \le \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} \quad \Leftrightarrow \quad x^2 \le 2n\cdot(2n+1) \qquad (n\in\mathbb{N}^*)$$

$\Rightarrow$ für $x\in[0,\sqrt{6}]$ sind die Terme monoton fallend.

<u>Korollar 3.9.2:</u> Für $0\le x \le \sqrt{6}$ gilt:

$$x \ge \sin(x) \ge x - \frac{x^3}{3!}$$

<u>Bew. von Satz 3.9.1:</u>

Wir wissen:
- $\sin:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ist stetig.
- $\sin(x) \ge x\left(1-\frac{x^2}{6}\right) > 0$ für $0<x<\sqrt{6}$

Wir suchen: $x\in(0,\infty)$ mit $\sin(x)<0$.

Betrachte $$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \underbrace{\frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \frac{x^{13}}{13!} \mp \dots}_{\text{Für welche } x \text{ sind die Terme ab hier monoton fallend?}}$$

Wie oben gilt dies, wenn: $$\frac{x^9}{9!} \ge \frac{x^{11}}{11!} \quad \Leftrightarrow \quad x^2 \le 10\cdot 11 = 110.$$

Ungleichung in Leibniz $\Rightarrow$ $$\frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \frac{x^{13}}{13!} \mp \dots \le \frac{x^9}{9!} \qquad \text{für } x\in[0,\sqrt{110}]$$

$$\Rightarrow \sin(x) \leq x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} \qquad \text{für } x \in [0, \sqrt{110}]$$

$$x = 4: \quad \sin(4) \leq -\frac{268}{405} < 0$$

Zwischenwertsatz $\Rightarrow$ sin hat eine Nullstelle zwischen 2 und 4.

$$\Rightarrow \pi = \inf\{t > 0 \mid \sin(t) = 0\} \in (2,4) \quad \left(\text{da } \sin(t) > 0 \ \forall t \in (0, \sqrt{6})\right)$$

Stetigkeit von sin $\Rightarrow$ $\sin(\pi) = 0$. $\Rightarrow \pi$ ist kleinste positive Nullstelle.

Aus dem Zwischenwertsatz folgt auch, dass $\sin(x) > 0 \ \forall x \in (0, \pi)$

$$0 = \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = 2 \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{\neq 0} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$0 < \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{1 - \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}_{0}} = 1$$

$$\Rightarrow e^{i\frac{\pi}{2}} = \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{0} + i \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{1} = i$$

$\square$

Korollar 3.9.3:

(1) $e^{i\pi} = -1 \qquad e^{2i\pi} = 1$

(2) $\forall x \in \mathbb{R}$: $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$, $\quad \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x)$

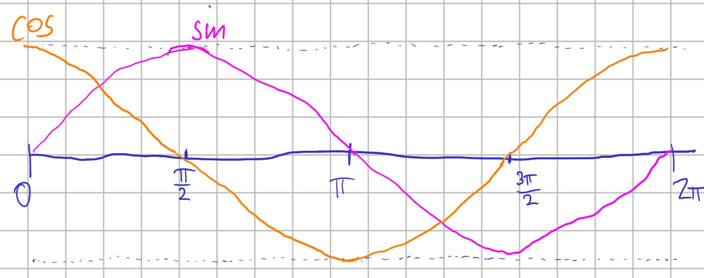
(3) + (4) $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\sin(x + \pi) = -\sin(x) \qquad \sin(x + 2\pi) = \sin(x)$$

$$\cos(x + \pi) = -\cos(x) \qquad \cos(x + 2\pi) = \cos(x)$$

sin und cos sind 2π-periodisch

(5)+(6) Für $x \in [0, 2\pi]$ gilt:



$\sin(x) = 0 \iff x \in \{0, \pi, 2\pi\}$

$\sin(x) > 0 \iff x \in (0, \pi)$

$\sin(x) < 0 \iff x \in (\pi, 2\pi)$

$\cos(x) = 0 \iff x \in \{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\}$

$\cos(x) > 0 \iff x \in [0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$

$\cos(x) < 0 \iff x \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$

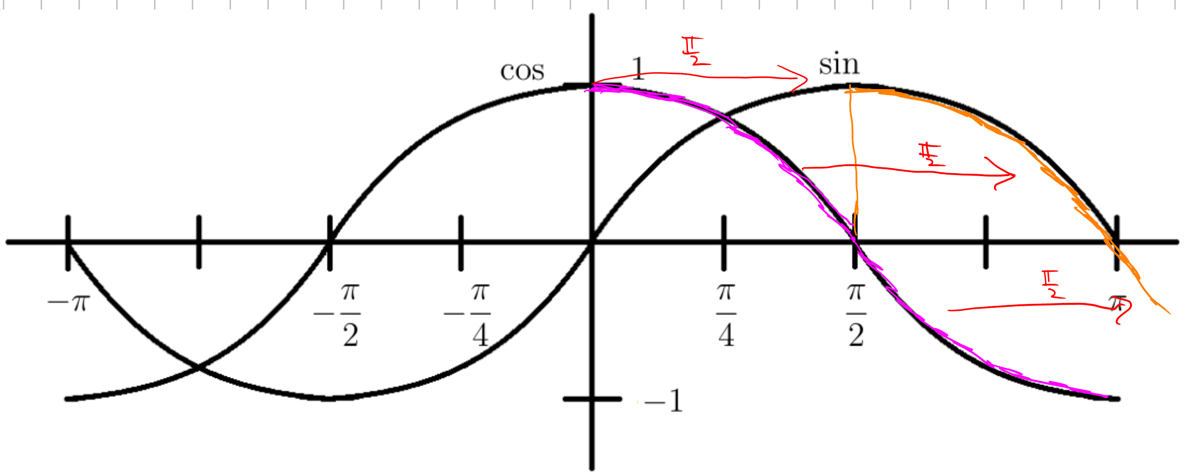
↳ Das Verhalten auf ganz $\mathbb{R}$ erhalten wir durch Verschiebung um Vielfache von 2π.

Bew: (nur die erste Gleichung in (2))

(2) $$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \frac{e^{i(x+\frac{\pi}{2})} - e^{-i(x+\frac{\pi}{2})}}{2i} = \frac{e^{ix}\cdot \overbrace{\cancel{e^{i\frac{\pi}{2}}}}^{\cancel{i}} - e^{-ix}\, \overbrace{\cancel{e^{-i\frac{\pi}{2}}}}^{=\frac{1}{e^{i\frac{\pi}{2}}} = \frac{1}{i} = \cancel{-i}}}{2\cancel{i}}$$

$$= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \cos(x)$$

$\square$

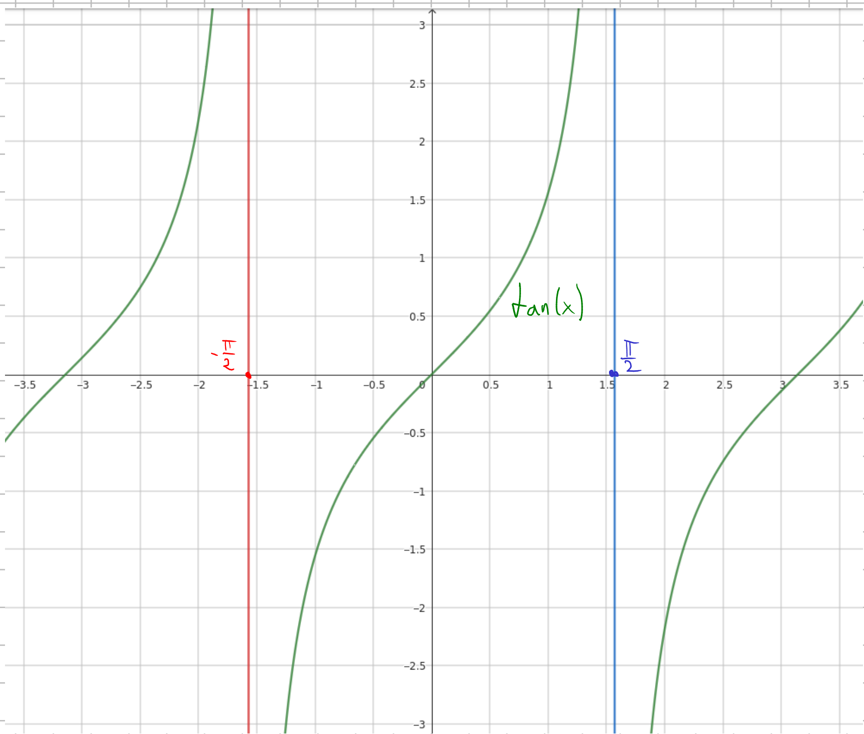


Def: • für $x \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} = \{\frac{\pi}{2} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ definieren wir

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$ ... Tangens

• für $x \notin \pi\mathbb{Z} = \{\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ definieren wir.

$$\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$ ... Cotangens



3.10 Grenzwerte von Funktionen

Wir betrachten Funktionen $f: D \to \mathbb{R}$ und wollen davon Grenzwerte betrachten.

Als "Grenzpunkte" x_0 müssen wir auch bestimmte Punkte ausserhalb von D zulassen.

<u>Def</u>: Sei $D \subset \mathbb{R}$. Ein <u>Häufungspunkt</u> von D ist eine Zahl $x_0 \in \mathbb{R}$ oder $x_0 = \infty$ oder $x_0 = -\infty$ mit der Eigenschaft, dass es eine Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ in $D \setminus \{x_0\}$ gibt mit $\lim_{n \to \infty} a_n = x_0$