Wiederholung: Ein Häufungspunkt von $D \subset \mathbb{R}$ ist eine Zahl $x_0 \in \mathbb{R}$ oder $x_0 = \infty$ oder $x_0 = -\infty$ mit der Eigenschaft, dass es eine Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ in $D \setminus \{x_0\}$ gibt mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x_0$.

Umformulierung der Definition eines Häufungspunkts:

- Fall $x_0 \in \mathbb{R}$: $\forall \delta > 0 : \left((x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\} \right) \cap D \neq \emptyset$

(Def. 3.10.1 im Skript).

- Fall $x_0 = \infty$: $\forall c > 0 : (c, \infty) \cap D \neq \emptyset$
- Fall $x_0 = -\infty$: $\forall c > 0 : (-\infty, -c) \cap D \neq \emptyset$

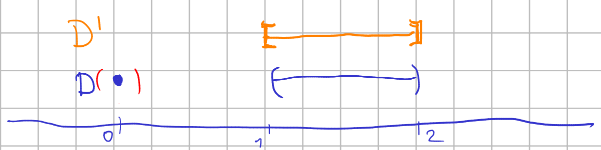
Beispiele:

- (Bsp. 3.10.2) $D = \{0\} \cup (1,2)$

Dann ist die Menge D' der Häufungspunkte von D:

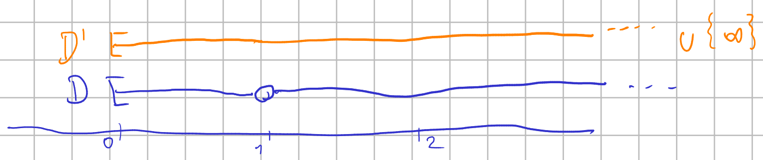
$$D' = [1,2].$$

Merke: 0 ist kein Häufungspunkt.
0 ist ein "isolierter Punkt" von D.



- $D = [0, \infty) \setminus \{1\}$

Menge D' der Häufungspunkte von $D = [0, \infty) \cup \{\infty\}$



Denn z.B. $a_n = n+1$ liegt in D und konvergiert (uneigentlich) gegen ∞.

Def: Sei $f: D \to \mathbb{R}$, x_0 ein Häufungspunkt von D. Dann ist $A \in \mathbb{R}$ oder $A = \infty$ oder $A = -\infty$ der <u>Grenzwert von f für $x \to x_0$</u> wenn: Für jede Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ in $D \setminus \{x_0\}$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = x_0 \implies \lim_{n\to\infty} f(a_n) = A.$$

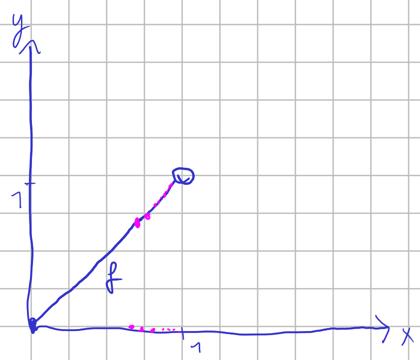
Notation: $A = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$

Falls kein solches A existiert, sagen wir, der Grenzwert von f für $x \to x_0$ existiert nicht. [$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$ oder $-\infty$ würden wir als "Grenzwert existiert" verstehen]

<u>Beispiele:</u>

- $f: [0,1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$.

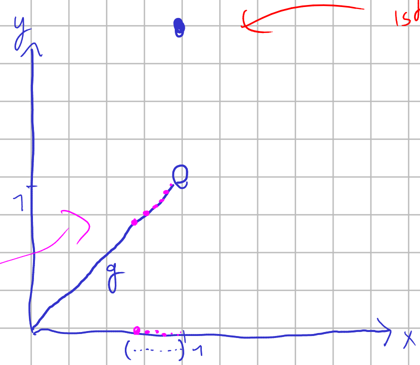
$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1.$



- $g : [0,1] \to \mathbb{R}$

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{falls } 0 \leq x < 1 \\ x+1 & \text{falls } x = 1 \end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to 1} g(x) = $ "lim ..." $= 1 \neq g(1)$

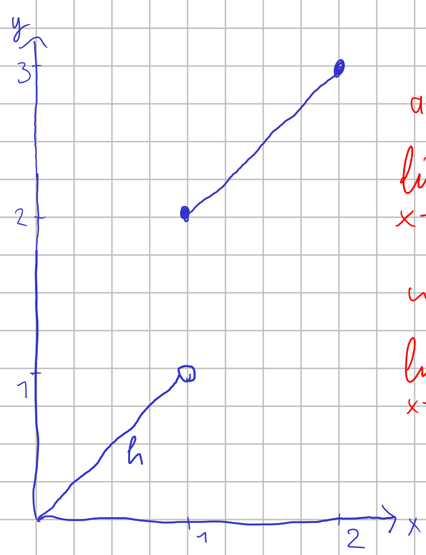


ist uns egal.

- $h : [0,2] \to \mathbb{R}$

$$h(x) = \begin{cases} x & \text{falls } 0 \leq x < 1 \\ x+1 & \text{falls } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to 1} h(x)$ existiert nicht!



aber:

$\lim\limits_{x\to 1^+} h(x) = 2$

und

$\lim\limits_{x\to 1^-} h(x) = 1.$

(siehe später)

Bemerkung 3.10.4: Seien im Folgenden immer $D \subset \mathbb{R}$ und x_0 ein Häufungspunkt von D.

(1) (angepasst) Sei $f: D \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R}$ ein Häufungspunkt von D. Dann ist $A \in \mathbb{R}$ der Grenzwert von f für $x \to x_0$ genau dann wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \forall x \in \big((x_0-\delta, x_0+\delta) \setminus \{x_0\}\big) \cap D : |f(x) - A| < \varepsilon$$

Bsp: $D = [0,1]$, $x_0 = 1$, $\big((x_0-\delta, x_0+\delta)\setminus\{x_0\}\big) \cap D = (1-\delta, 1)$

Merke: Dies ist Def. 3.10.3 im Skript.

Insgesamt müssten wir 9 Definitionen (die leicht voneinander abweichen) aufschreiben, um Grenzwerte von f für $x \to x_0$ in allen Fällen zu beschreiben,

x_0: $\in \mathbb{R}$ / $= \infty$ / $= -\infty$

$$3 \times 3 = 9$$

A: $\in \mathbb{R}$ / $= \infty$ / $= -\infty$

Ein weiteres Beispiel für eine solche Umformulierung bzw. alternative Definition:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty \iff \forall c > 0 \; \exists \delta > 0 : \forall x \in \big((x_0-\delta, x_0+\delta)\setminus\{x_0\}\big) \cap D : f(x) < -c.$$

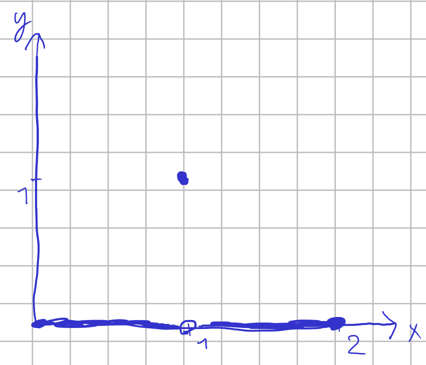
Übung: Schreiben Sie weitere Umformulierungen der 9 Möglichkeiten auf.

(2) Sei $x_0 \in D$. Dann gilt:

f stetig in x_0 $\iff$ $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existiert in $\mathbb{R}$ und $f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x)$

<u>Bsp:</u> • $f : [0,2] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1) \cup (1,2] \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$



Dann ist $\lim_{x \to 1} f(x) = 0$ (der Grenzwert existiert)

aber: $\neq 1 = f(1)$

Und f ist nicht stetig in $x_0 = 1$.

<u>Merke:</u> Wenn $x_0 \notin D$, dann kann man nicht von Stetigkeit einer Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ im Punkt x_0 sprechen.

Allerdings: Wenn $x_0 \notin D$ und $\lim_{x \to x_0} f(x)$ in $\mathbb{R}$ existiert, dann ist

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in D \\ \lim_{x \to x_0} f(x) & x = x_0 \end{cases}$$

stetig in x_0.

"Stetige Fortsetzung von f in x_0"

<u>Bsp vom Anfang:</u> $f : [0,1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ hat die stetige Fortsetzung $\tilde{f} : [0,1] \to \mathbb{R}$, $\tilde{f}(x) = x$.

(3) Wenn $f,g : D \to \mathbb{R}$ und $\lim_{x\to x_0} f(x)$, $\lim_{x\to x_0} g(x)$ in $\mathbb{R}$ existieren, dann folgt

$$\lim_{x\to x_0} \left(f(x)+g(x)\right) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x) \quad \text{und}$$

$$\lim_{x\to x_0} \left(f(x)\cdot g(x)\right) = \left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)\cdot\left(\lim_{x\to x_0} g(x)\right)$$

$f(x) \le g(x) \ \forall x \in D$

(4) Wenn $f,g : D \to \mathbb{R}$ und $f \le g$, dann ist

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \le \lim_{x\to x_0} g(x)$$

falls die Grenzwerte existieren.

(5) Wenn $f, g_1, g_2 : D \to \mathbb{R}$, $g_1 \le f \le g_2$ und $\lim_{x\to x_0} g_i(x)$ $(i=1,2)$ existieren mit $\lim_{x\to x_0} g_1(x) = \lim_{x\to x_0} g_2(x)$, dann existiert auch $\lim_{x\to x_0} f(x)$ und

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g_i(x) \quad (i=1,2)$$ "Sandwichlemma"

<u>Beispiel 3.10.5:</u> Sei $D = \mathbb{R}\setminus\{0\}$ und $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ für $x \neq 0$.

Existiert $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}$?

Behauptung: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.

Korollar 3.9.2 $\Rightarrow$ für $x \in [0, \sqrt{6}]$ gilt: $x - \frac{x^3}{3!} \leq \sin(x) \leq x$

Für $x \in \cancel{(0, \sqrt{6}]}$: $1 - \frac{x^2}{3!} \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq 1$.

$[-\sqrt{6}, \sqrt{6}] \setminus \{0\}$.

gerade Funktionen

d.h. $x \mapsto -x$ ändert nichts.

$$\lim_{x \to 0} \left(1 - \frac{x^2}{3!}\right) \underset{\text{Stetigkeit}}{=} 1 = \lim_{x \to 0} 1$$

Sandwichlemma $\Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.

["Ähnlich: $\frac{\cos(x) - 1}{x}$]

Satz 3.10.6: Seien $D, E \to \mathbb{R}$, x_0 Häufungspunkt von D, $f: D \to E$.

Wir nehmen an, dass $y_0 := \lim_{x \to x_0} f(x)$ existiert.

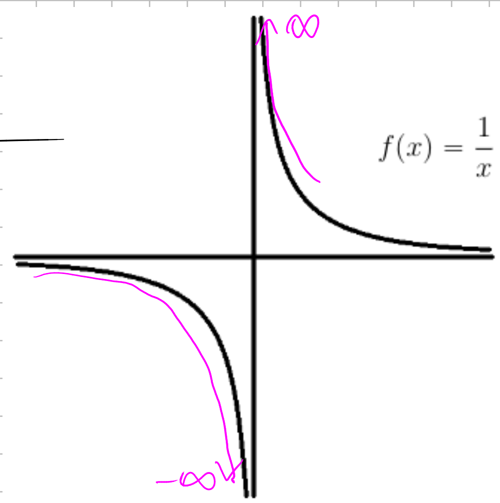
und $y_0 \in E$. Falls $g: E \to \mathbb{R}$ in y_0 stetig ist

dann gilt: $$g(y_0) = \lim_{x \to x_0} g(f(x))$$

Bew: Verwende die Definition des Grenzwerts von f in x_0 und Folgenstetigkeit von g in y_0. "$\square$"

Bsp: $$\lim_{x \to 0} \frac{1}{1 + \underbrace{\frac{\sin(x)}{x}}_{\to 1}} = \frac{1}{1 + \underbrace{\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}}_{=1}} = \frac{1}{2},$$ da $g(y) = \frac{1}{1+y}$ in $y_0 = 1$ stetig ist.

Links- und rechtsseitige Grenzwerte



Beobachtung: das Verhalten von $x \mapsto \frac{1}{x}$ ist "links von 0" anders als "rechts von 0".

Def: (einseitige Häufungspunkte) Sei $D \subset \mathbb{R}$.

- $x_0 \in \mathbb{R}$ ist rechtsseitiger Häufungspunkt von D, wenn x_0 ein Häufungspunkt von $D \cap (x_0, \infty)$ ist.
- $x_0 \in \mathbb{R}$ ist linksseitiger Häufungspunkt von D, wenn x_0 ein Häufungspunkt von $D \cap (-\infty, x_0)$ ist.

Def: (einseitige Grenzwerte) Sei $D \subset \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}$ oder $A = \infty$ oder $A = -\infty$

- Wenn $x_0 \in \mathbb{R}$ rechtsseitiger Häufungspunkt von D ist und der Grenzwert A der eingeschränkten Funktion $f|_{D \cap (x_0,\infty)}$ für $x \to x_0$ existiert, dann nennen wir diesen den rechtsseitigen Grenzwert von f für $x \to x_0$.

  Notation: $A = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$

- Wenn $x_0 \in \mathbb{R}$ linksseitiger Häufungspunkt von D ist und der Grenzwert A der eingeschränkten Funktion $f|_{D \cap (-\infty, x_0)}$ für $x \to x_0$ existiert, dann nennen wir diesen den linksseitigen Grenzwert von f für $x \to x_0$.

  Notation: $A = \lim_{x \to x_0^-} f(x)$

Bemerkung: $D \subset \mathbb{R}$, x_0 rechtsseitiger Häufungspunkt von D, $f: D \to \mathbb{R}$

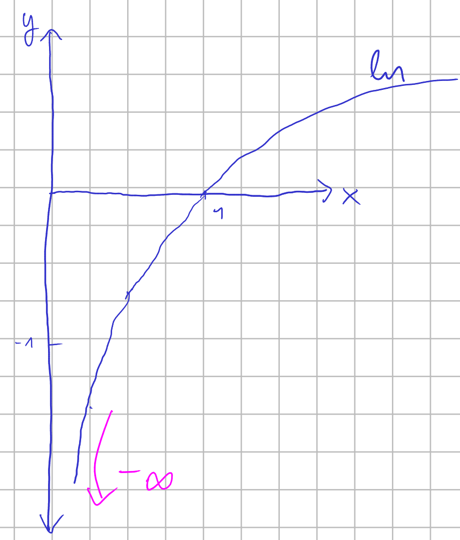
$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = A \iff$ für jede Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ in D mit $a_n > x_0$ für alle $n \geq 1$ und mit $\lim_{n \to \infty} a_n = x_0$ gilt, dass

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = A.$$

Analog für den linksseitigen Grenzwert und Folgen mit $a_n < x_0 \ \forall n \geq 1$.

Bsp: $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$ $\qquad$ $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

Beispiel 3.10.7 $\ln : (0,\infty) \to \mathbb{R}$.



Dann ist $\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$

Bew: Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Folge in $(0,\infty)$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Sei $c>0$. Für $0<x<e^{-c}$ impliziert die strenge Monotonie von ln, dass $\ln(x) < \ln(e^{-c}) = -c$.

Da $a_n \to 0$ gibt es $N\in\mathbb{N}$ mit $a_n < e^{-c}$ $\forall n \geq N$.

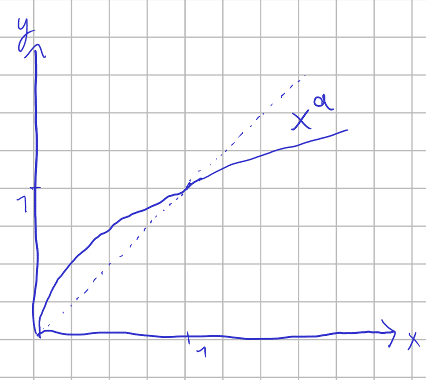
Dann folgt: $\ln(a_n) < -c$ $\quad \forall n \geq N$

Dies zeigt, dass $\lim_{n\to\infty} \ln(a_n) = -\infty$. $\Rightarrow \lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$

$\square$

Beispiel 3.10.8: $a>0$, $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$, $f(x) = x^a \overset{\text{Def.}}{=} \exp(a \ln x)$

Dann ist $\lim_{x\to 0^+} x^a = 0$



↳ Für $a > 0$ besitzt $(0,\infty) \to (0,\infty)$, $x \mapsto x^a$ eine stetige Fortsetzung auf $[0,\infty)$. Wir bezeichnen die so erhaltene Funktion immer noch mit

$$[0,\infty) \to [0,\infty)$$
$$x \mapsto x^a$$

Sie ist streng monoton steigend und bijektiv, und stetig.