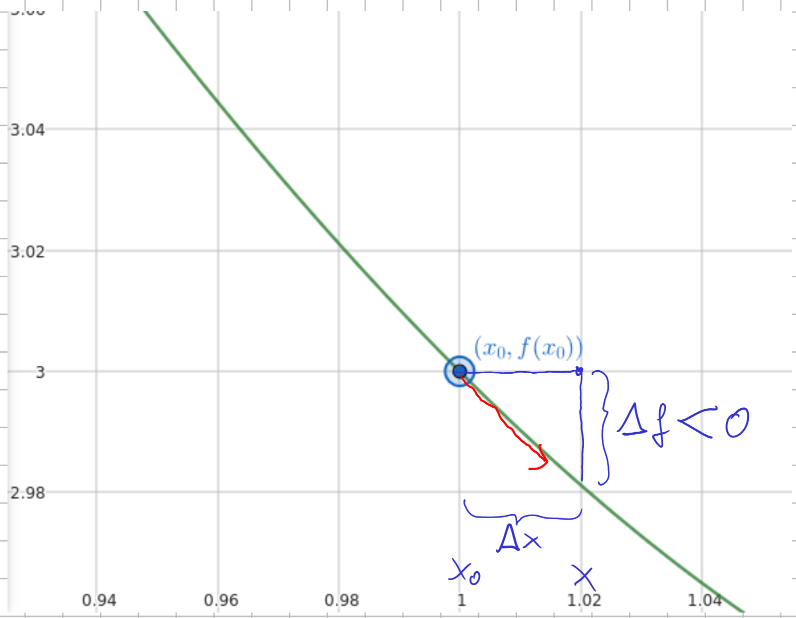
# Kapitel 4: Differenzierbare Funktionen

Clicker-Frage: $f(x) = x^4 - 3x^2 + x + 4$ $\qquad x_0 = 1, \; f(x_0) = 3$

Merke: Das Minimum existiert, da $f$ stetig ist und $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \infty$.



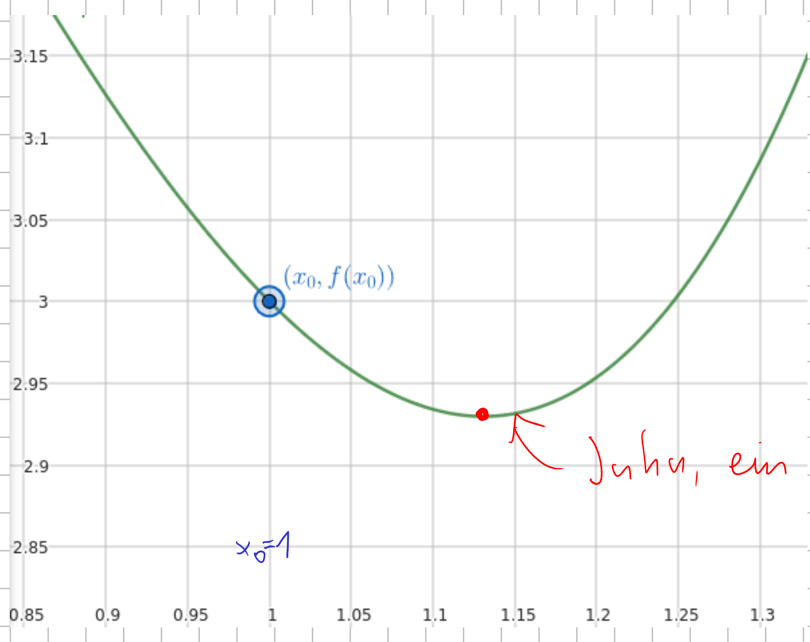

Sollen wir von $x_0$ nach links oder nach rechts gehen, um das Minimum von $f$ zu finden?

→ Nach rechts gehen könnte zum Ziel führen, da $f$ in der Nähe von $x_0$ fallend ist. ($\Delta f < 0$)

(Baby-Beispiel von Gradient Descent)

Frage: Wie hätten wir diese Entscheidung treffen können, wenn wir kein Bild zur Verfügung gehabt hätten?

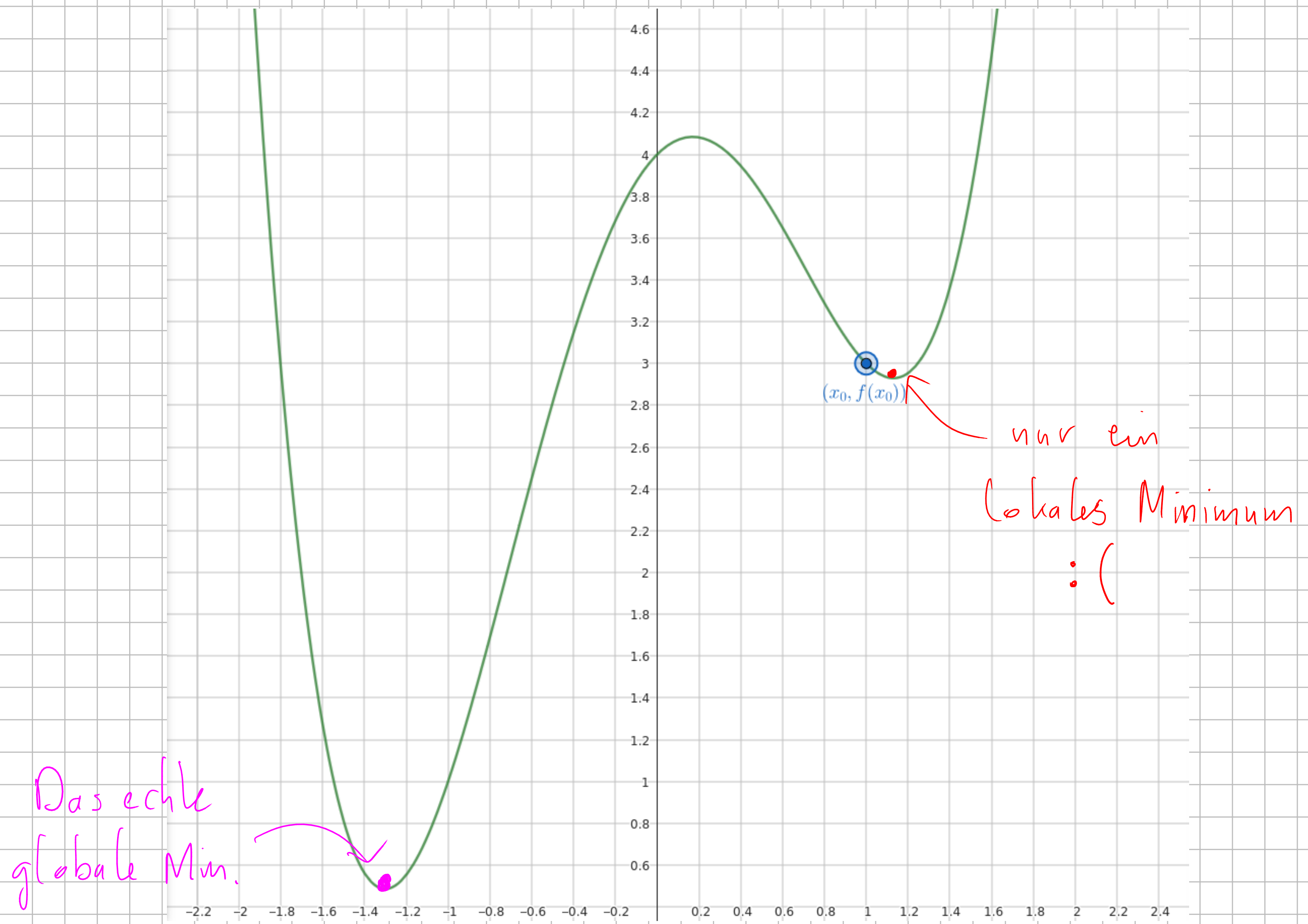
Weiter im Beispiel:




Juhu, ein Minimum.

**Frage:** Wie können wir Minima finden / beschreiben, wenn wir kein Bild haben?

Leider war das gefundene Minimum nicht das echte ("globale") Minimum




**Frage:** Welche Schlüsse kann man aus dem lokalen Verhalten einer Funktion für das globale Verhalten ziehen?

**Ziel des Kapitels:**

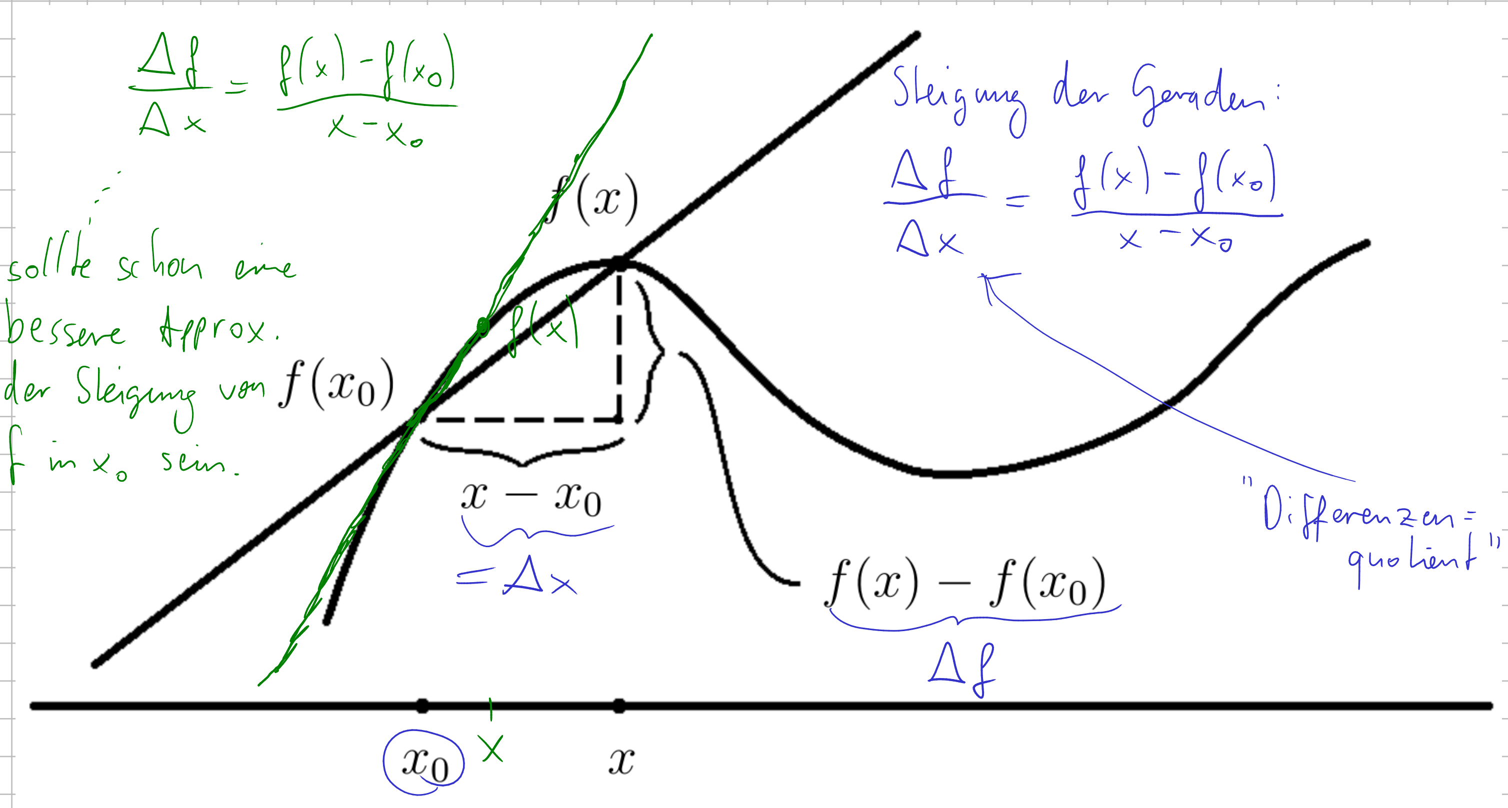
- Untersuchung der lokalen Veränderung von Funktionen
  dafür: lokale Approximation durch Geraden "Tangenten"
- Direkte Anwendungen:
  - Monotonie von Funktionen (mon. steigend / mon. fallend)

- lokale Extrema (Min. / Max.)
- Taylor-Approximation (Approx. höherer Ordnung).

## 4.1 Die Ableitung: Definition und elementare Folgerungen

Sei $D \subset \mathbb{R}$, $f: D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$ Häufungspunkt von D

Wir wollen die "Tangentensteigung" von f als Grenzwert von "Sekantensteigungen" erhalten.




**Def 4.1.1** $D \subset \mathbb{R}$, $f: D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$ Häufungspunkt von D.

f ist in $x_0$ differenzierbar falls der Grenzwert

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

"Ableitung von f in $x_0$"

in $\mathbb{R}$ existiert. Ist dies der Fall, wird der Grenzwert mit $f'(x_0)$ bezeichnet.

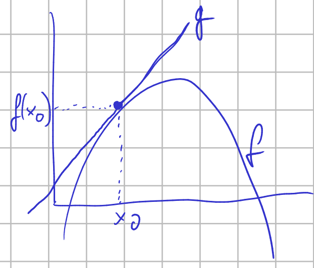
**Bemerkung 4.1.2:** Es ist oft von Vorteil, $x = x_0 + h$ zu setzen. Dann ist der Grenzwert in der obigen Definition:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

**Bemerkung:** Wenn $f : D \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in D$ differenzierbar ist, dann ist die Gerade $g$ definiert durch die Gleichung

"Tangente in $x_0$"

$$g(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0)$$




diejenige Gerade, die $f$ in der Nähe von $x_0$ am besten approximiert.

Der "Approximationsfehler" $f(x) - g(x)$ konvergiert für $x \to x_0$ schneller gegen $0$ als $x - x_0$:

Es gilt
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - g(x)}{x - x_0} = 0.$$

**Übung:** Prüfen Sie dies nach.

Nun eine Umformulierung der Differenzierbarkeit:

**Satz 4.1.4:** $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$ Häufungspunkt von $D$.
$f$ ist genau dann in $x_0$ differenzierbar, wenn es eine Funktion $\phi : D \to \mathbb{R}$ gibt, die stetig in $x_0$ ist, und mit

$$f(x) = f(x_0) + \phi(x)\,(x - x_0) \qquad \forall x \in D.$$

In diesem Fall ist $\phi(x_0) = f'(x_0)$.

Bew (Idee)

Setze $\phi(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} & \text{wenn } x \neq x_0 \\ \underbrace{\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}_{f'(x_0)} & \text{wenn } x = x_0 \end{cases}$

"stetige Fortsetzung von $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ in $x_0$"

"$\square$"

**Korollar 4.1.5:** $D\subset\mathbb{R}$, $f: D\to\mathbb{R}$, $x_0\in D$ Häufungspunkt von $D$.

Wenn $f$ in $x_0$ differenzierbar ist, dann ist $f$ in $x_0$ stetig.

**Beispiel 4.1.6**

(1) $f = 1 : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Dann ist $f'(x_0) = 0 \quad \forall x_0\in\mathbb{R}$

Denn: $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \dfrac{1-1}{x-x_0} = 0 \quad \forall x\neq x_0$.

(2) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x$. Dann ist $f'(x_0) = 1 \quad \forall x_0\in\mathbb{R}$

Denn: $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \dfrac{x-x_0}{x-x_0} = 1 \quad \forall x\neq x_0$.

(3) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$. Dann ist $f'(x_0) = 2x_0 \quad \forall x_0\in\mathbb{R}$.

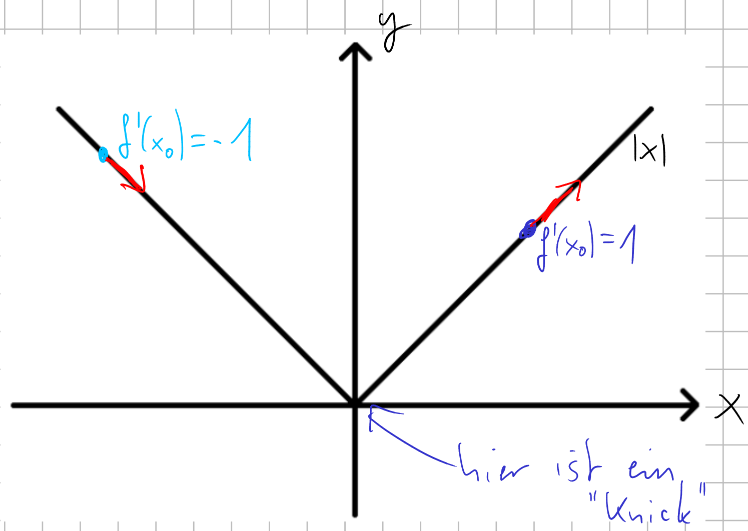
Denn: $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^2-x_0^2}{x-x_0} = \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{(x+x_0)\cancel{(x-x_0)}}{\cancel{x-x_0}}$

$= \lim\limits_{x\to x_0}(x+x_0) = x_0+x_0 = 2x_0$.

(4) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=|x|$ ist in $x_0=0$ nicht differenzierbar!

Denn: $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-x_0} = \dfrac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & x>0 \\ -1 & x<0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ der Grenzwert für $x \to x_0$ existiert nicht




In allen anderen Stellen $x_0 \neq 0$ ist $f$ differenzierbar.

$$f'(x_0) = \begin{cases} 1 & x_0 > 0 \\ -1 & x_0 < 0 \end{cases}$$

<u>Def. 4.1.7</u>: $D \subset \mathbb{R}$, $f: D \to \mathbb{R}$. Die Funktion $f$ ist differenzierbar wenn $f$ in allen Häufungspunkten $x_0$ von $D$ mit $x_0 \in D$ differenzierbar ist.

zB: $D = (-1, 0] \cup (1, 2) \cup [3, \infty)$

<u>Bemerkung</u>: Typischer Fall: $D$ ist eine Vereinigung von Intervallen $I_n$ mit Endpunkten $a_n < b_n$. In diesem Fall ist jeder Punkt von $D$ ein Häufungspunkt von $D$.

In diesem Fall erhalten wir für eine differenzierbare Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ eine neue Funktion $f': D \to \mathbb{R}$

Ableitung von $f$.

## Beispiel 4.1.8:

(1) $\exp: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar

$$\exp' = \exp$$

(2) $\sin, \cos: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind differenzierbar.

$$\sin' = \cos \quad , \quad \cos' = -\sin$$

Bew von (1):
$(h \neq 0)$

$$\frac{\exp(x_0+h) - \exp(x_0)}{h} = \frac{\exp(x_0)\exp(h) - \exp(x_0)}{h}$$

$$= \exp(x_0) \cdot \frac{\exp(h) - 1}{h}$$

Für $h \neq 0$ ist:

$$\frac{\exp(h)-1}{h} = \frac{\left(\cancel{1} + \cancel{h}^{1} + \frac{h^{\cancel{2}}}{2!} + \frac{h^{\cancel{3}\,2}}{3!} + \dots\right) - \cancel{1}}{\cancel{h}\ 1}$$

$$= \underbrace{1 + \frac{h}{2!} + \frac{h^2}{3!} + \frac{h^3}{4!} + \dots}_{r(h) \dots \text{ Potenzreihe mit Konvergenzradius } \infty}$$

Da $r$ eine konvergente Potenzreihe ist, ist sie in $h_0 = 0$ stetig!
(Satz 3.7.11)

$$\Rightarrow \lim_{h \to 0} \frac{\exp(h)-1}{h} = \lim_{h \to 0} r(h) \overset{\text{Stetigkeit!}}{=} r(0) = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{h \to 0} \frac{\exp(x_0+h) - \exp(x_0)}{h} = \exp(x_0) \underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{\exp(h)-1}{h}}_{=1} = \exp(x_0)$$

Also: $\exp'(x_0) = \exp(x_0)$. (sin, cos: siehe Skript.) $\square$

Frage: Kennen Sie weitere Funktionen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die differenzierbar sind und $f' = f$?

Nun: "Rechenregeln" für Ableitungen

Satz 4.1.9: Sei $D \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in D$ ein Häufungspunkt von $D$, $c \in \mathbb{R}$, $f, g: D \to \mathbb{R}$ in $x_0$ differenzierbar. Dann gelten:

(1) (Linearität der Ableitung)
$c \cdot f$ und $f + g$ sind in $x_0$ differenzierbar und

$$(c \cdot f)'(x_0) = c \cdot f'(x_0) \qquad (f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

(2) (Produktregel)
$f \cdot g$ ist in $x_0$ differenzierbar und

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)\, g(x_0) + f(x_0)\, g'(x_0)$$

(3) (Quotientenregel)
Wenn $g(x_0) \neq 0$ dann ist $x_0$ ein Häufungspunkt von $\{x \in D \mid g(x) \neq 0\}$, $\frac{f}{g}$ ist in $x_0$ differenzierbar und

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)\, g(x_0) - f(x_0)\, g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

Bew: Wir verwenden Satz 4.1.4.

Es gibt $\phi, \psi : D \to \mathbb{R}$ stetig in $x_0$ mit

$(*)$ $f(x) = f(x_0) + \phi(x)(x-x_0)$ und $\phi(x_0) = f'(x_0)$

$(**)$ $g(x) = g(x_0) + \psi(x)(x-x_0)$ und $\psi(x_0) = g'(x_0)$.

$\forall x \in D$.

Summe von $(*)$ und $(**)$:

$$f(x)+g(x) = f(x_0)+g(x_0) + \underbrace{\left(\phi(x)+\psi(x)\right)}_{\text{stetig in } x_0!}(x-x_0)$$

Satz 4.1.4 $\Rightarrow$ $f+g$ in $x_0$ differenzierbar und $(f+g)'(x_0) = \phi(x_0)+\psi(x_0)$
$= f'(x_0)+g'(x_0)$

Produkt von $(*)$ und $(**)$:

$$f(x)\cdot g(x) = f(x_0)\cdot g(x_0) + f(x_0)\psi(x)(x-x_0) + g(x_0)\phi(x)(x-x_0) + \phi(x)\psi(x)(x-x_0)^2$$

$$= f(x_0)g(x_0) + \Big(\underbrace{\phi(x)g(x_0) + f(x_0)\psi(x) + \phi(x)\psi(x)\overbrace{(x-x_0)}^{\text{fällt weg in } x_0}}_{\text{stetig in } x_0}\Big)\cdot(x-x_0)$$

Satz 4.1.4 $\Rightarrow$ $f\cdot g$ in $x_0$ differenzierbar und

$$(f\cdot g)'(x_0) = \underbrace{\phi(x_0)}_{f'(x_0)}g(x_0) + f(x_0)\underbrace{\psi(x_0)}_{g'(x_0)} = f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$$

$\Rightarrow$ (1) & (2) bewiesen

für (3) siehe Skript. $\square$

## Beispiel 4.1.10:

(1) Für $n \in \mathbb{N}^*$ ist $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$ $\quad \forall x \in \mathbb{R}$.

(2) $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ ist im Definitionsbereich $\mathbb{R} \setminus (\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z})$ differenzierbar und $\tan'(x) = \frac{1}{\cos(x)^2}$ $\quad \forall x \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$

(3) $\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$ ist im Definitionsbereich $\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ differenzierbar und $\cot'(x) = -\frac{1}{\sin(x)^2}$ $\quad \forall x \notin \pi\mathbb{Z}$

Bew: (1) Induktion:

Start: Für $n=1$: $x' = 1$ (Beispiel 4.1.6)

Schritt: Für $n \geq 2$ nehmen wir an, dass $(x^{n-1})' = (n-1)x^{n-2}$

Dann folgt aus der Produktregel (Satz 4.1.9 (2)):

$$(x^n)' = (x \cdot x^{n-1})' = \underbrace{1 \cdot x^{n-1}}_{1 \cdot x^{n-1}} + \underbrace{x \cdot (n-1)\, x^{n-2}}_{(n-1) \cdot x^{n-1}} = n \cdot x^{n-1}.$$

(2) Aus der Quotientenregel (Satz 4.1.9(3)) folgt für $x \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$:

$$\tan'(x) = \left(\frac{\sin}{\cos}\right)'(x) = \frac{\overbrace{\sin'(x)}^{\cos(x)} \cdot \cos(x) - \sin(x)\overbrace{\cos'(x)}^{-\sin(x)}}{\cos(x)^2}$$

$$= \frac{\overbrace{\sin^2(x) + \cos^2(x)}^{=1}}{\cos(x)^2} = \frac{1}{\cos(x)^2}$$

(3) analog zu (2)

Antwort zur Frage vorhin: Funktionen mit $f' = f$?

- $f = \exp$ ✓
- $f = 0$. ✓
- weitere? ... Nächstes Mal!