<u>Clicker-Frage:</u> Welche differenzierbaren Funktionen $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ erfüllen $f'=f$?

- $f=0$? ✓

- $f(x)=c\,\exp(x)$ für ein $c\in\mathbb{R}$? ✓

$$f'(x)=\underbrace{(c\cdot\exp)'}_{c\cdot\exp'}(x)=c\cdot\underbrace{\exp'}_{\exp}(x)=c\cdot\exp(x)=f(x)$$

- $f(x)=\exp(x+d)$ für ein $d\in\mathbb{R}$? ✓

$$\exp(x+d)=\underbrace{\exp(d)}_{=c}\cdot\exp(x)=c\cdot\exp(x)\Rightarrow f'=f$$ aufgrund des 2. Punkts oben

- Weitere solche f ?

Gibt es nicht! $c\cdot\exp(x)$ für $c\in\mathbb{R}$ sind alle reellen Lösungen der "<u>Differentialgleichung</u>" $f'=f$.

↳ ausführlich in Analysis II

<u>Wiederholung:</u> $D\subset\mathbb{R}$, $f:D\to\mathbb{R}$, $x_0\in D$ Häufungspunkt von D.

- f ist in x_0 differenzierbar falls

"Ableitung von f in x_0" →
$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

in $\mathbb{R}$ existiert.

- Kor: Differenzierbar in x_0 $\Rightarrow$ stetig in x_0

- f ist in x_0 genau dann differenzierbar, wenn es eine in x_0 stetige Funktion $\phi: D \to \mathbb{R}$ gibt mit

$$f(x) = f(x_0) + \phi(x)(x - x_0)$$

für alle $x \in D$.

Dann ist $\phi(x_0) = f'(x_0)$.

- Tangentengleichung in x_0:

$$g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Satz 4.1.11: (Kettenregel)

Seien $D, E \subset \mathbb{R}$, $f: D \to E$, $g: E \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in D$ ein Häufungspunkt von D, so dass $y_0 := f(x_0)$ ein Häufungspunkt von E ist. Wir nehmen an, dass f in x_0 und g in y_0 differenzierbar ist. Dann ist $g \circ f$ in x_0 differenzierbar und:

$$(g \circ f)'(x_0) = \underbrace{g'(f(x_0))}_{\text{"äussere Ableitung"}} \cdot \underbrace{f'(x_0)}_{\text{"innere Ableitung"}}$$

Bew: Seien $\phi: D \to \mathbb{R}$, $\psi: E \to \mathbb{R}$ Funktionen stetig in x_0 bzw. y_0 mit

$$f(x) = f(x_0) + \phi(x)(x - x_0) \qquad \phi(x_0) = f'(x_0)$$

$$g(y) = g(y_0) + \psi(y)(y - y_0) \qquad \psi(y_0) = g'(y_0)$$

Dann gilt mit $y = f(x)$ und $y_0 = f(x_0)$:

$$g(f(x)) = g(f(x_0)) + \psi(f(x))\,(f(x) - f(x_0))$$

$$= \underline{g(f(x_0))} + \underbrace{\psi(f(x)) \cdot \phi(x)} \cdot \underline{(x - x_0)}$$

stetig in x_0, da f stetig in x_0 ist (da differenzierbar) und ψ stetig in $f(x_0) = y_0$ ist, und ϕ stetig in x_0 ist.

$\Rightarrow$ (Satz 4.1.4) $g \circ f$ ist differenzierbar in x_0 und

$$(g \circ f)'(x_0) = \underbrace{\psi(\underbrace{f(x_0)}_{y_0})}_{= g'(y_0) = g'(f(x_0))} \cdot \underbrace{\phi(x_0)}_{f'(x_0)} = g'(f(x_0))\, f'(x_0)$$

$\square$

<u>Korollar 4.1.12:</u> Sei $f: D \to E$ <u>bijektiv</u>, $x_0 \in D$ ein Häufungspunkt von D, und sei f in x_0 differenzierbar mit $f'(x_0) \neq 0$. Wir nehmen zusätzlich an, dass f^{-1} in $y_0 := f(x_0)$ stetig ist. Dann ist y_0 ein Häufungspunkt von E, f^{-1} ist in y_0 differenzierbar und

$$(f^{-1})'(\underset{f(x_0)}{\underset{\shortparallel}{y_0}}) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

<u>Bemerkung:</u> Wenn $D = I$ ein Intervall ist, das aus mehr als einem Punkt besteht, und $f: I \to E = f(I)$ streng monoton und stetig ist, dann kann man oben die Zusatzannahme, dass f^{-1} in $y_0 = f(x_0)$ stetig ist, weglassen.

(da sie aufgrund des Umkehrsatzes dann automatisch erfüllt ist.)

Kein (vollständiger) **Beweis!**

Für alle $x \in D$ gilt: $(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x$

Kettenregel im Punkt x_0:

$$\underset{(x)'}{\underset{\shortparallel}{1}} = (f^{-1})'(\underbrace{f(x_0)}_{y_0}) \cdot f'(x_0) \implies (f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Problem: Dieses Argument setzt Differenzierbarkeit von f^{-1} in y_0 schon voraus! Wir müssen diese aber erst beweisen.

Echter Beweis: siehe Skript "$\square$"

Beispiel 4.1.13:

(1) $\ln : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar und

$$\ln'(y) = \frac{1}{y} \qquad \forall y \in (0,\infty)$$

Denn: $\ln$ ist die Umkehrfunktion von $\exp : \mathbb{R} \to (0,\infty)$

und $\exp'(x) = \exp(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Korollar oben $\implies$

$$\ln'(\exp(x)) = \frac{1}{\exp'(x)} = \frac{1}{\exp(x)}$$

Da jedes $y \in (0,\infty)$ als $\exp(x)$ für ein $x \in \mathbb{R}$ geschrieben werden kann, folgt $\ln'(y) = \frac{1}{y} \quad \forall y \in (0,\infty)$.

(2) Sei $a \in \mathbb{R}$. Wir betrachten die Funktion

$$(0,\infty) \to (0,\infty)$$
$$x \mapsto x^a = \exp(a \cdot \ln(x))$$

Diese Funktion ist differenzierbar und

$$(x^a)' = a \cdot x^{a-1} \qquad (\forall x \in (0,\infty))$$

Denn: $(x^a)' = \exp(a \cdot \ln(x))' \overset{\text{Kettenregel und } \ln'(x) = \frac{1}{x}}{=} \underbrace{\exp'}_{\exp}(a \cdot \ln(x)) \cdot \frac{a}{x}$

$$= \underbrace{\exp(a \ln(x))}_{x^a} \cdot \frac{a}{x} = a \cdot \underbrace{\exp(a \ln(x)) \exp(\overbrace{-\ln(x)}^{\ln(\frac{1}{x})})}_{\underbrace{\exp((a-1)\ln(x))}_{x^{a-1}}}$$

$$= x^a \cdot \frac{a}{x} = a \cdot x^{a-1}$$

<u>Übung</u>: Lässt sich obige Aussage in einem geeigneten Sinn auf den Definitionsbereich $[0,\infty)$ erweitern? Wenn ja, wie? Hinweis: Die Antwort hängt von a ab.

4.2 Zentrale Sätze über die erste Ableitung

Def 4.2.1: Sei $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in D$.

(1) f besitzt in x_0 ein <u>lokales Maximum</u>, wenn es ein $\delta > 0$ gibt mit

$$f(x) \leq f(x_0) \qquad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap D$$

(2) f besitzt in x_0 ein <u>lokales Minimum</u>, wenn es ein $\delta > 0$ gibt mit

$$f(x) \geq f(x_0) \qquad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap D$$

(3) f besitzt in x_0 ein <u>lokales Extremum</u>, falls x_0 ein lokales Minimum oder Maximum von f ist.

Beispiel:

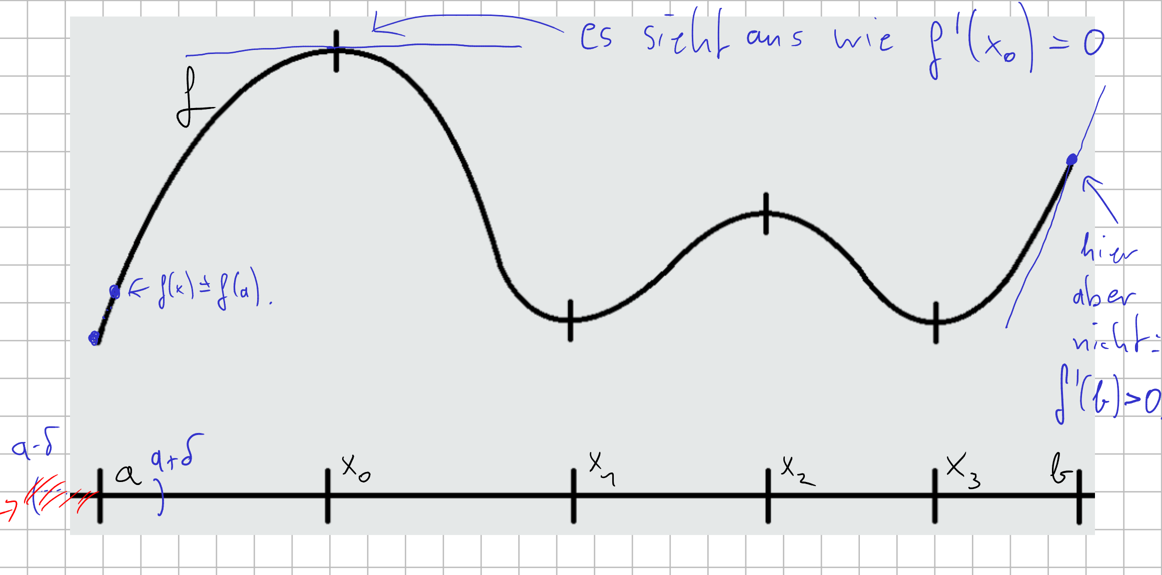
$f: [a, b] \to \mathbb{R}$ wie im Bild. Lokale Extrema von f?

Lok. Minima:

$x_1, x_3,$ a

Lok. Maxima:

$x_0, x_2,$ b

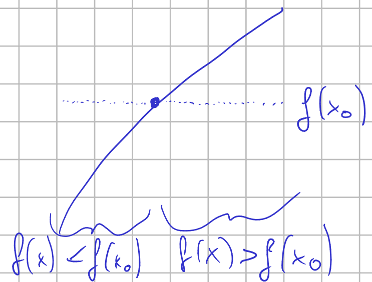


Satz 4.2.2: (Leicht angepasst)

Sei $D \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in D$ ein Häufungspunkt von D, $f: D \to \mathbb{R}$ differenzierbar in x_0

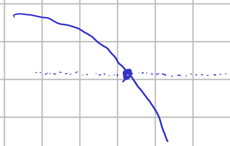
(1) Falls $f'(x_0) > 0$, dann gibt es $\delta > 0$ mit

$$f(x) > f(x_0) \quad \forall x \in (x_0, x_0+\delta) \cap D$$
$$f(x) < f(x_0) \quad \forall x \in (x_0-\delta, x_0) \cap D$$

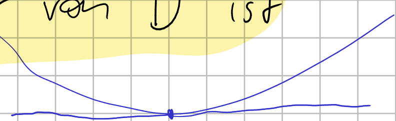


(2) Falls $f'(x_0) < 0$, dann gibt es $\delta > 0$ mit

$$f(x) < f(x_0) \quad \forall x \in (x_0, x_0+\delta) \cap D$$
$$f(x) > f(x_0) \quad \forall x \in (x_0-\delta, x_0) \cap D$$



(3) Falls f in x_0 ein lokales Extremum besitzt und x_0 ein links- und rechtsseitiger Häufungspunkt von D ist dann folgt $f'(x_0) = 0$



schliesst z.B. "Randpunkte" aus.

Bew: (1) Wir schreiben $f(x) = f(x_0) + \phi(x)(x-x_0)$
$\phi: D \to \mathbb{R}$ in x_0 stetig, $\phi(x_0) = f'(x_0) > 0$.

Stetigkeit $\Rightarrow \exists \delta > 0: \phi(x) > 0 \quad \forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \cap D$.

$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{\phi(x)}_{>0 \text{ für } x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \cap D}(x-x_0) \longrightarrow \begin{array}{ll} >0 & \text{falls } x > x_0 \\ <0 & \text{falls } x < x_0. \end{array}$$

$$\Rightarrow \varphi(x)(x-x_0) \begin{cases} >0 & \text{für } x \in (x_0, x_0+\delta) \cap D \\ <0 & \text{für } x \in (x_0-\delta, x_0) \cap D \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad f(x) \begin{cases} > f(x_0) & \text{für } x \in (x_0, x_0+\delta) \cap D \\ < f(x_0) & \text{für } x \in (x_0-\delta, x_0) \cap D \end{cases}$$

(2) Analog zu (1)

(3) x_0 links- und rechtsseitiger Häufungspunkt von D

$\Rightarrow \forall \delta > 0$ ist $(x_0, x_0+\delta) \cap D \neq \emptyset$

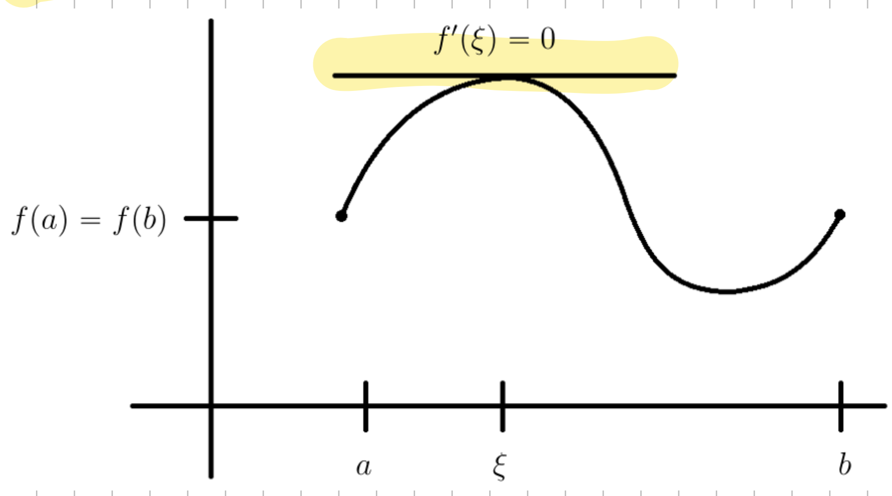
$(x_0-\delta, x_0) \cap D \neq \emptyset$

Wenn $f'(x_0) > 0$ oder < 0 wäre, dann würde aus (1) bzw. (2) ein Widerspruch folgen, wenn x_0 ein lokales Extremum von f ist. $\Rightarrow f'(x_0) = 0$ $\square$

Satz 4.2.3 (Rolle)

Seien $a < b$, $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und in (a,b) differenzierbar. Wenn $f(a) = f(b)$, dann gibt es $\xi \in (a,b)$ mit

$f'(\xi) = 0$.



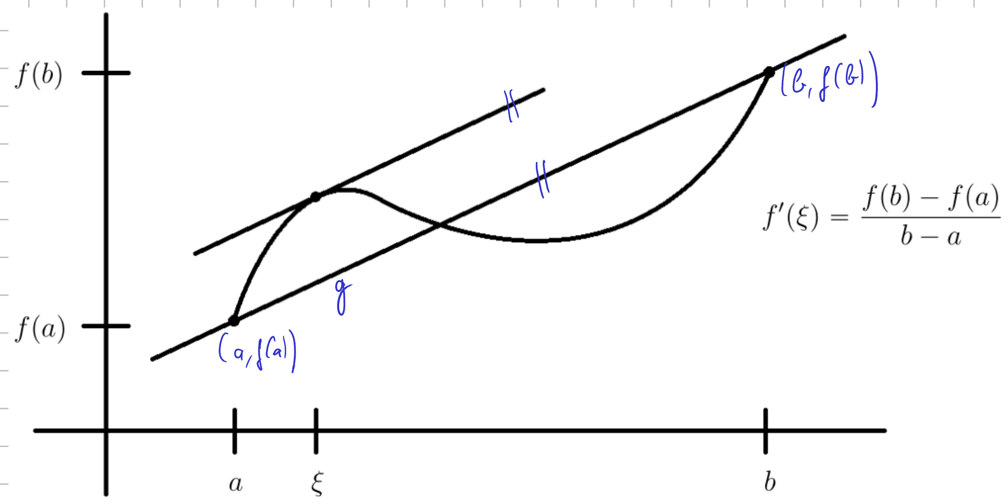
<u>Bew (Idee)</u>: Verwende den Min-Max-Satz und Satz 4.2.2 (3)
(Details siehe Skript.) $\square$

<u>Satz 4.2.4</u> (Mittelwertsatz) im Skript: "Satz von Lagrange"

Seien $a<b$, $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig und in (a,b) differenzierbar. Dann gibt es ein $\xi\in(a,b)$ mit

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Steigung der Geraden zw. $(a,f(a))$, $(b,f(b))$.



<u>Bew:</u> Sei g die Gerade durch $(a,f(a))$ und $(b,f(b))$.

Dann gilt $g'(x)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ $\forall x\in\mathbb{R}$.

$h(x)=f(x)-g(x)$ erfüllt $h(a)=f(a)-f(a)=0$
$$h(b)=f(b)-f(b)=0$$

Rolle $\Rightarrow$ $\exists\,\xi\in(a,b)$ mit $h'(\xi)=0$

$$h'(\xi)=f'(\xi)-g'(\xi)=f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$\Rightarrow f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \qquad \square$$

Korollar 4.2.5: Seien $a < b$, $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und in (a, b) differenzierbar.

(1) Falls $f'(\xi) = 0 \quad \forall \xi \in (a, b)$, dann ist f konstant

(2) Falls $f'(\xi) = g'(\xi) \quad \forall \xi \in (a, b)$, dann gibt es $c \in \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = g(x) + c \quad \forall x \in [a, b].$$

(3)+(4) Falls $f'(\xi) \overset{>0}{\geq} 0 \quad \forall \xi \in (a, b)$, dann ist f auf $[a, b]$ (streng) monoton wachsend.

(5)+(6) Falls $f'(\xi) \overset{<0}{\leq} 0 \quad \forall \xi \in (a, b)$, dann ist f auf $[a, b]$ (streng) monoton fallend.

(7) Falls es $M \geq 0$ gibt mit $|f'(\xi)| \leq M \quad \forall \xi \in (a, b)$, dann gilt $\forall x_1, x_2 \in [a, b]$:

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq M \, |x_1 - x_2|$$

Bemerkung: Obiges Korollar zieht Schlussfolgerungen über das globale Verhalten von f aus Informationen über das lokale Verhalten von f.

Bw: Verwende immer den Mittelwertsatz

(1) Sei $a < x \leq b$. Mittelwertsatz angewendet auf $[a,x]$ $\Longrightarrow$

$\exists \xi \in (a,x)$ mit $f(x) - f(a) = \underbrace{f'(\xi)}_{=0} \cdot (x-a)$

Wenn $f'(\xi) = 0 \quad \forall \xi \in (a,b)$, dann impliziert obiges:

$$f(x) - f(a) = f'(\xi)(x-a) = 0 \quad \Longrightarrow$$

D.h. $f(x) = f(a) \quad \forall x \in [a,b]$, also f ist konstant.

Rest des Beweises: siehe Skript. $\square$

Anwendung: Alle differenzierbaren Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f' = f$ sind von der Form $f(x) = c \cdot e^x$ für ein $c \in \mathbb{R}$.

Bew: Betrachte $g(x) = e^{-x} f(x)$

Produktregel $\Rightarrow$ $g'(x) = \cancel{-e^{-x} f(x)} + \cancel{e^{-x} \underbrace{f'(x)}_{f(x)}} = 0$

$\forall x \in \mathbb{R}$.

D.h. $\exists c \in \mathbb{R}$ mit $\underset{e^{-x} f(x)}{\overset{}{g(x)}} = c \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow f(x) = c \cdot e^x$ $\square$