Wiederholung:

- Wenn $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und in (a,b) differenzierbar ist, dann gilt:

$$f' = 0 \implies f \text{ konstant auf } [a,b]$$
$$f' \geq 0 \implies f \text{ monoton steigend auf } [a,b]$$
$$f' > 0 \implies f \text{ streng monoton steigend auf } [a,b]$$
$$f' \leq 0 \implies f \text{ monoton fallend auf } [a,b]$$
$$f' < 0 \implies f \text{ streng monoton fallend auf } [a,b]$$

Intervall

- Wenn $f: I \to J := f(I)$ stetig, streng monoton und in $x_0 \in I$ differenzierbar ist mit $f'(x_0) \neq 0$, dann ist f^{-1} in $y_0 := f(x_0)$ differenzierbar und

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Beispiel 4.2.6 (trigonometrische Funktionen)

(1) arcsin: $\sin: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$ ist streng monoton steigend, da $\sin'(x) = \cos(x) > 0 \quad \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Außerdem: $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$

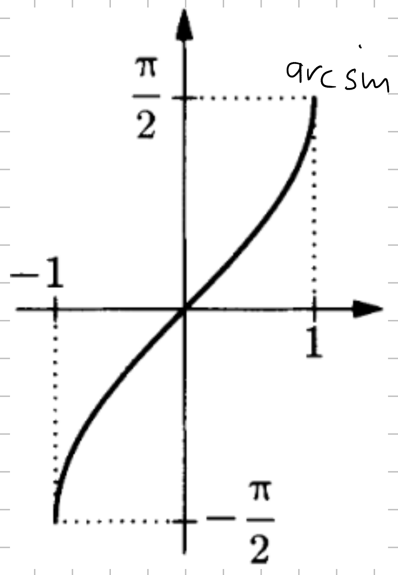
$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

$\Rightarrow \sin: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$ ist bijektiv.

Wir definieren $\arcsin : [-1,1] \longrightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

als die Umkehrfunktion

"Arcus Sinus"



Da $\sin'(x) = \cos(x) > 0 \quad \forall x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

ist arcsin in allen $y \in (-1,1)$ differenzierbar.

Wenn $y = \sin(x)$ für $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, dann gilt:

$$\arcsin'(y) = \frac{1}{\cos(x)}$$

Unter Verwendung von $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ und $\cos(x) > 0$.

folgt $\cos(x) = \sqrt{1-\sin^2(x)} = \sqrt{1-y^2}$

und daher $\arcsin'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$.

(2) arccos: Analog zu oben erhält man, dass

$$\cos : [0,\pi] \to [-1,1]$$

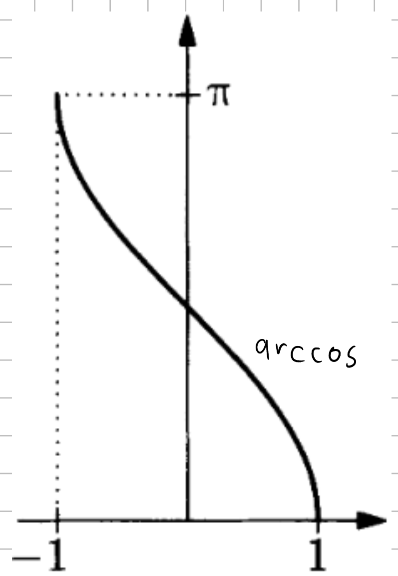
streng monoton fallend ist. Die Umkehrabbildung

$$\arccos : [-1,1] \longrightarrow [0,\pi]$$

ist differenzierbar in $(-1,1)$ "Arcus Cosinus"

und für $y \in (-1,1)$ ist

$$\arccos'(y) = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

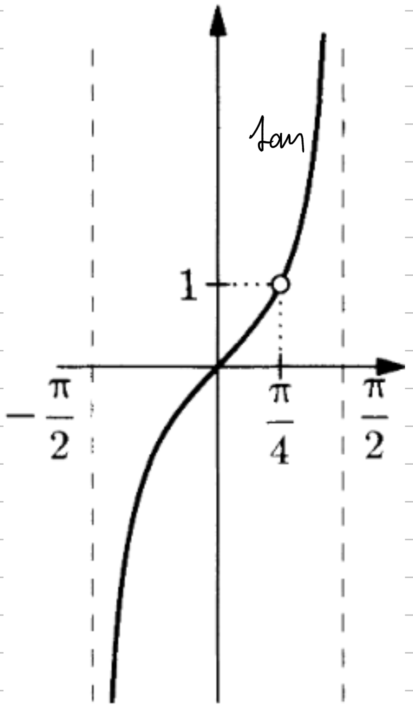


(3) arctan: Für $x \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$ ist

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

und $\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} > 0$ für $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$\Rightarrow$ tan ist in $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ streng monoton steigend



Da $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = \infty$

und $\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} \tan(x) = -\infty$ ist $\tan: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ bijektiv

Die Umkehrfunktion ist

$$\arctan: \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{... "Arcus tangens"}$$

Sie ist differenzierbar und für $y \in \mathbb{R}$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $y = \tan(x)$

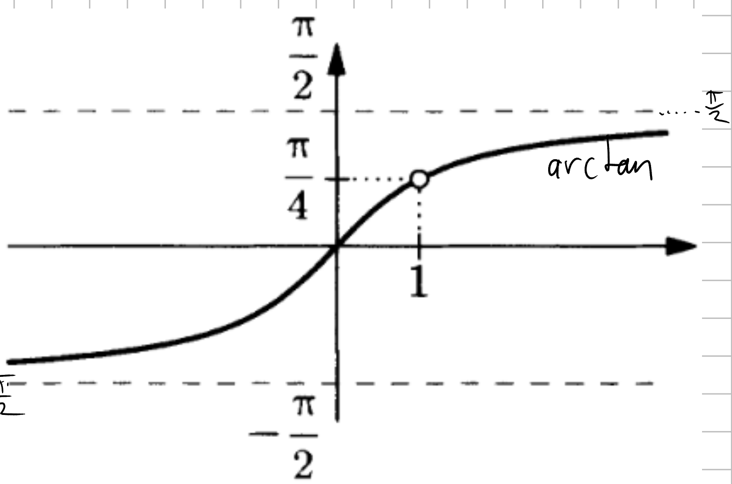
gilt

$$\arctan'(y) = \frac{1}{\tan'(x)} = \cos^2(x) \overset{\text{Behauptung}}{=} \frac{1}{1+y^2}$$

denn: $\cos^2(x) = \dfrac{1}{\frac{1}{\cos^2(x)}}$

$$= \frac{1}{\frac{\sin^2(x) + \cos^2(x)}{\cos^2(x)}}$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}} = \frac{1}{1+\tan^2(x)} = \frac{1}{1+y^2}$$



Nun ein weiteres Hilfsmittel zur Berechnung von Grenzwerten:

Satz 4.2.10 (Regel von l'Hospital)

Seien $a < b$ und $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $g'(x) \neq 0 \ \forall x \in (a, b)$.

Angenommen es gilt

(i) $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = \lim\limits_{x \to b^-} g(x) = 0$ "Fall $\frac{0}{0}$"

oder

(ii) $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = \pm\infty$ und $\lim\limits_{x \to b^-} g(x) = \pm\infty$ "Fall $\pm\frac{\infty}{\infty}$"

und der Grenzwert $\lim\limits_{x \to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} =: \lambda$ existiert.

Dann existiert auch $\lim\limits_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)}$ und es gilt

$$\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda .$$

Bemerkung 4.2.11:

- λ kann in $\mathbb{R}$ oder ∞ oder $-\infty$ sein
- a kann auch $-\infty$ sein, b kann auch ∞ sein.
- Der Satz gilt auch für $x \to a^+$.

Heuristik für den Fall "$\frac{0}{0}$": Angenommen f, g sind in x_0 differenzierbar.

Tangentengleichungen: $t_f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

$t_g(x) = g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0)$

Nahe bei x_0: "$\frac{f(x)}{g(x)} \approx \frac{t_f(x)}{t_g(x)}$"

Wenn $f(x_0) = g(x_0) = 0$: $\frac{t_f(x)}{t_g(x)} = \frac{f'(x_0)\cdot\cancel{(x-x_0)}}{g'(x_0)\cdot\cancel{(x-x_0)}} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$

d.h. heuristisch "$\frac{f(x)}{g(x)} \approx \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$"

Beispiel 4.2.12:

(1) Für $a > 0$ folgt aus l'Hospital:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x^a} \overset{\text{l'Hospital}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{a x^{a-1}} = \frac{1}{a}\cdot \underbrace{\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^a}}_{=0} = 0.$$

"ln wächst langsamer als jede Potenz von x"

(2) $$\lim_{x\to 0^+} x \ln(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} \overset{\text{l'Hospital}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\underbrace{\lim_{x\to 0^+} x}_{=0} = 0.$$

Clicker: $$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(2x)}{1-\cos(x)} \overset{\text{l'Hospital}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{2\sin(2x)}^{2\cdot 2\cancel{\sin(x)}\cos(x)}}{\cancel{\sin(x)}} = 4\cdot \underbrace{\lim_{x\to 0} \cos(x)}_{=1} = 4.$$

Alternativ: $\lim_{x \to 0} \frac{2\sin(2x)}{\sin(x)} \overset{\text{l'Hospital}}{=} 2 \cdot \lim_{x \to 0} \frac{2 \cdot \cos(2x)}{\cos(x)}$

$$= 4 \cdot \underbrace{\lim_{x \to 0} \frac{\cos(2x)}{\cos(x)}}_{=1} = 4.$$

"Gegenbeispiel":

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x + \sin(x)}{2x + \cos(x)} = ?$$

Versuchen wir l'Hospital anzuwenden:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{(2x + \sin(x))'}{(2x + \cos(x))'} = \lim_{x \to \infty} \frac{2 + \cos(x)}{2 - \sin(x)} \quad \dots \text{ existiert nicht!}$$

Aber: $\lim_{x \to \infty} \frac{2x + \sin(x)}{2x + \cos(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{2 + \frac{\sin(x)}{x}}{2 + \frac{\cos(x)}{x}} = \frac{2}{2} = 1.$ ($\frac{\sin(x)}{x} \to 0$, $\frac{\cos(x)}{x} \to 0$)

Wichtig: Nur wenn der Grenzwert von $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ tatsächlich existiert, darf l'Hospital angewendet werden. Sonst können wir nichts schliessen.

Konvexe Funktionen

Bis zum Ende des Abschnitts sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall mit mehr als einem Punkt.

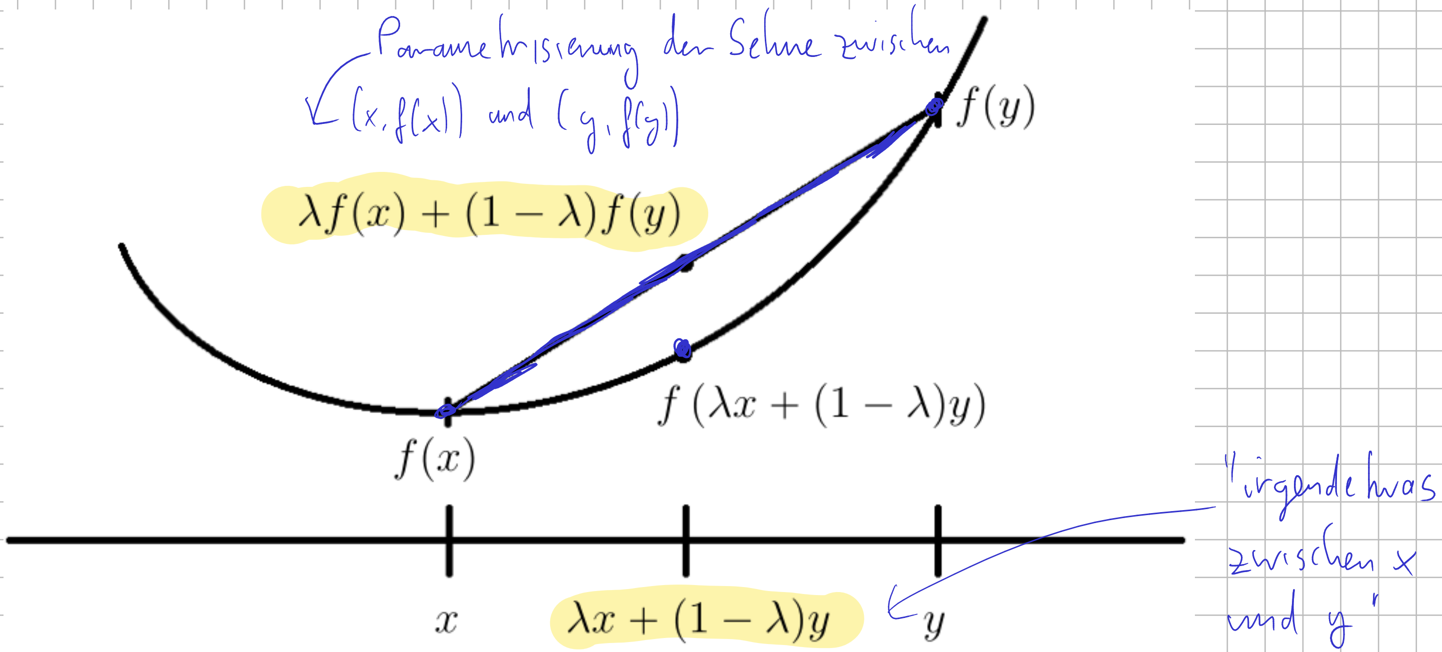
Def. 4.2.13: Sei $f: I \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

(1) f ist **konvex** (auf I) falls für alle $x \leq y$ in I und $\lambda \in [0,1]$:

$$f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

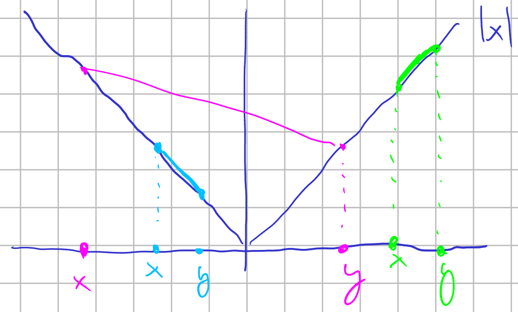
(2) f ist **streng konvex** (auf I) falls für alle $x < y$ in I und $\lambda \in (0,1)$:

$$f(\lambda x + (1-\lambda) y) < \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$



Intuitiv: Die Funktion f liegt unter jeder Sehne zwischen $(x, f(x))$ und $(y, f(y))$ $(x \leq y$ in $I)$.

Beispiel: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = |x|.$



f ist konvex, aber nicht streng konvex.

Denn für $x, y \in \mathbb{R}$, $\lambda \in [0,1]$ gilt:

$$|\lambda x + (1-\lambda) y| \underset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} \lambda |x| + (1-\lambda)|y|$$

Bemerkung 4.2.14: Sei $f: I \to \mathbb{R}$ konvex. Mit Induktion kann man zeigen, dass für alle $n \geq 1$, $x_1, \ldots, x_n \in I$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in [0,1]$ mit $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ gilt, dass

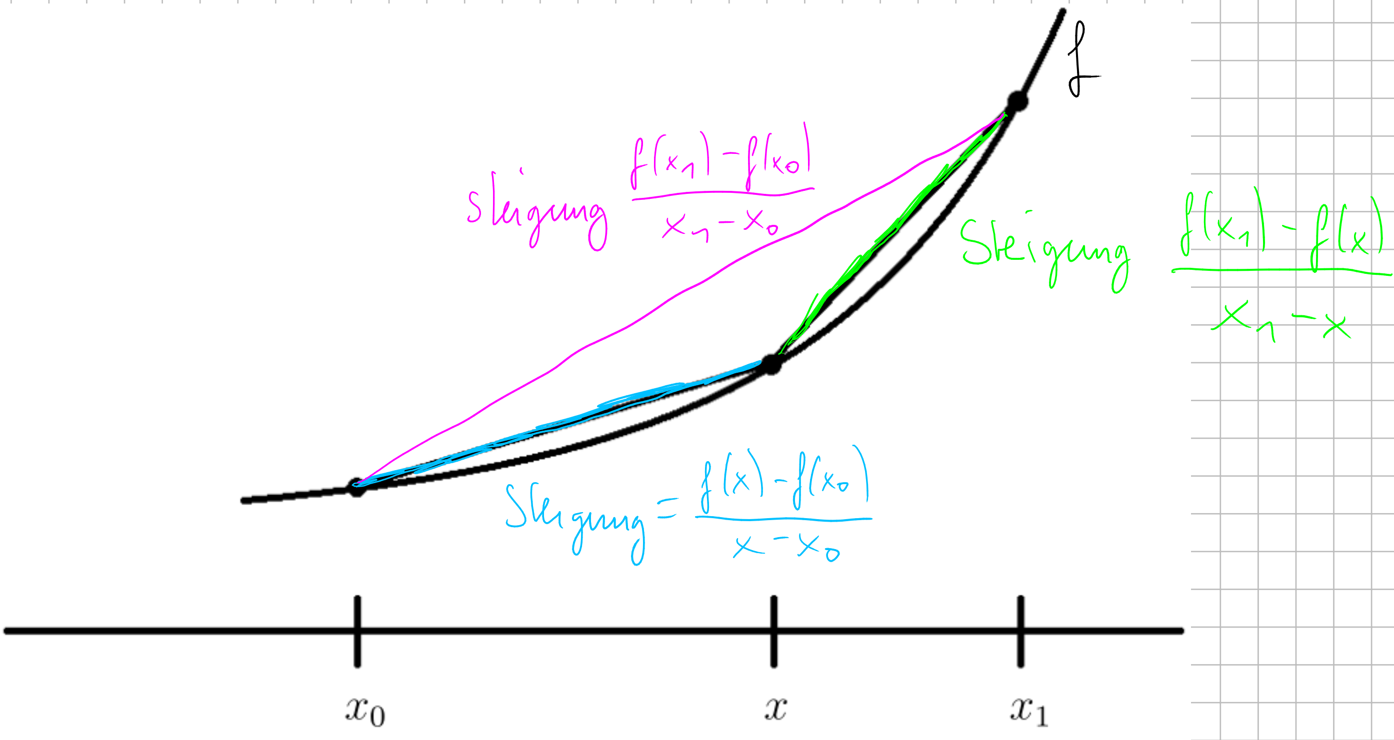
$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$$

In der Def. war $n=2$, $x = x_1$, $y = x_2$, $\lambda_1 = \lambda$, $\lambda_2 = 1-\lambda$

Lemma 4.2.15: Sei $f: I \to \mathbb{R}$ eine beliebige Funktion. f ist genau dann konvex, wenn für alle $x_0 < x < x_1$ in I

$$(*) \qquad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}$$

f ist genau dann streng konvex, wenn in $(*)$ immer $<$ statt $\leq$ gilt.



<u>Lemma</u>: (nicht im Skript) Ist $f: I \to \mathbb{R}$ konvex und $x_0 < x < x_1$ in I, dann gilt

$$(**) \qquad \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \le \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} \le \frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x}$$

Strenge Konvexität von f impliziert $<$ statt $\le$ in $(**)$

Warum sind konvexe Funktionen interessant?

↳ z.B. im Kontext von Optimierungsproblemen haben konvexe Funktionen "gute" Eigenschaften welche effiziente Algorithmen zur Lösung erlauben.

<u>Übung</u>: Ist $f: I \to \mathbb{R}$ konvex, dann ist jedes lokale Minimum ein globales Minimum.

Wie erkennt man konvexe Funktionen?
↪ zB. über die Ableitung!

<u>Satz 4.2.16:</u> Ist $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar, dann gilt:

$$f \text{ (streng) konvex} \iff f' \text{ (streng) monoton wachsend.}$$

<u>Bw:</u> Wir zeigen nur: f' monoton wachsend $\Rightarrow$ f konvex.
Wir wollen Lemma 4.2.15 verwenden: Seien $x_0 < x < x_1$ in I.

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \qquad\qquad \frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x}$$

Mittelwertsatz: $\qquad \| \qquad\qquad \|$

$$f'(\eta) \qquad\qquad f'(\xi)$$

wobei $\eta \in (x_0, x)$, $\xi \in (x, x_1)$. Da $\xi > x > \eta$, folgt aus Monotonie von f', dass $f'(\xi) \geq f'(\eta)$

$$\Longrightarrow \underbrace{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{f'(\eta)} \leq \underbrace{\frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x}}_{f'(\xi)}.$$

Aufgrund von Lemma 4.2.15 ist f also konvex. $\square$

Korollar 4.2.17: Sei $f: I \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar

d.h. f' ist differenzierbar

Falls $f''(x) \overset{>}{\geq} 0 \quad \forall x \in I$ dann ist

f (streng) konvex.

Bew: Aufgrund von Korollar 4.2.5 impliziert $f'' \geq 0$, dass f' monoton wachsend ist. Nun verwende Satz 4.2.16. $\square$

Beispiel 4.2.18: $f: (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = -\ln(x)$ ist streng konvex, da

$$f'(x) = -\frac{1}{x}$$

$$f''(x) = \frac{1}{x^2} > 0 \qquad \forall x \in (0, \infty)$$