<u>Wiederholung:</u> Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall mit mehr als einem Punkt.

- Eine differenzierbare Funktion $f: I \to \mathbb{R}$ ist genau dann konvex wenn f' monoton steigend ist
- Eine zweimal differenzierbare Funktion $f: I \to \mathbb{R}$ ist genau dann konvex, wenn $f'' \geq 0$ ist.

$$f'' := (f')'$$

4.3 Höhere Ableitungen

Sei $D \subset \mathbb{R}$ so dass jeder Punkt $x_0 \in D$ ein Häufungspunkt von D ist.

z.B. $D = I$ ein Intervall mit mehr als einem Punkt.

Für eine Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ setzen wir $f^{(0)} := f$

<u>Def 4.3.1:</u>

(1) Für $n \in \mathbb{N}^*$ nennen wir $f: D \to \mathbb{R}$ <u>n-mal differenzierbar in D</u>, falls $f^{(n-1)}$ in D existiert und differenzierbar ist.
Wir setzen $f^{(n)} := (f^{(n-1)})'$ und nennen $f^{(n)}$ die <u>n-te Aleitung von f</u>.

Notation: $f' = f^{(1)}$, $f'' = f^{(2)}$, $f''' = f^{(3)}$

(2) $f: D \to \mathbb{R}$ ist <u>n-mal stetig differenzierbar in D</u>, falls f n-mal differenzierbar ist und $f^{(n)}$ stetig in D ist.

(3) $f: D \to \mathbb{R}$ heisst <u>glatt in D</u>, falls f für alle $n \in \mathbb{N}$ n-mal differenzierbar ist. "∞-mal / beliebig oft differenzierbar"

<u>Bemerkung 4.3.2</u>: Eine n-mal differenzierbare Funktion ist $(n-1)$-mal stetig differenzierbar.

Denn: Differenzierbarkeit von $f^{(n-1)}$ impliziert Stetigkeit von $f^{(n-1)}$ (Korollar 4.1.5)

<u>Satz 4.3.3</u>: Sei D wie oben, $n \in \mathbb{N}^*$, $f, g: D \to \mathbb{R}$ n-mal differenzierbar in D. Dann gilt:

(1) $f+g$ ist in D n-mal differenzierbar und

$$(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$$

(2) $f \cdot g$ ist in D n-mal differenzierbar und

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

"verallgemeinerte Produktregel"

<u>Bemerkung</u>: Die Formel ist analog zum binomischen Lehrsatz:

$\forall z, w \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$: $$(z+w)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k w^{n-k}$$

Beispiel 4.3.4:

(1) exp, sin, cos sind alle glatt in $\mathbb{R}$.

Denn:
- $\exp' = \exp$ ... bleibt immer gleich beim Ableiten.
- Ableitungen von sin, cos sind immer in $\{\pm \sin, \pm \cos\}$

(2) Polynome sind glatt in $\mathbb{R}$

Denn: Ableitungen von Polynomen sind wieder Polynome.

(3) $\ln : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ ist glatt

Denn: $\ln'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$

$\ln''(x) = (-1) \cdot x^{-2}$

$\ln'''(x) = (-1)^2 \cdot 2 \cdot x^{-3}$ $\to n=3$, $(-1)^2 = (-1)^{3-1}$, $2 = 2! = (n-1)!$

... $\ln^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} (n-1)! \cdot x^{-n}$ (Beweis durch Induktion)

"Übung!"

Clicker-Frage: Sei $f(x) = \arctan(x)$. Was ist der Wert von $f^{(3)}(0)$?

$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ... und jetzt könnten wir mit der Quotientenregel weiter ableiten, um f'' und f''' zu erhalten.

(Machen wir aber nicht, denn wir sind faul. Auflösung später!)

Satz 4.3.5: Sei D wie oben, $n \in \mathbb{N}^*$, $f, g: D \to \mathbb{R}$ n-mal differenzierbar in D. Falls $g(x) \neq 0$ $\forall x \in D$, dann ist $\frac{f}{g}$ n-mal differenzierbar in D.

Satz 4.3.6: Seien $D, E \subset \mathbb{R}$ Teilmengen für die jeder Punkt ein Häufungspunkt ist. Seien $f: D \to E$ und $g: E \to \mathbb{R}$ n-mal differenzierbar. Dann ist $g \circ f$ n-mal differenzierbar in D.

$\underline{n=1}$: $(g \circ f)'(x) = g'(f(x))\, f'(x)$

$\underline{n=2}$: $(g \circ f)''(x) = g''(f(x))\,(f'(x))^2 + g'(f(x))\, f''(x)$

Bemerkung: Die obigen Aussagen gelten auch, wenn man überall "n-mal differenzierbar" durch "glatt" ersetzen.

Beispiel 4.3.7:

(1) $\tan$ ist in $\mathbb{R} \setminus (\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z})$ glatt

Denn: $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ und $\sin, \cos$ sind glatt in $\mathbb{R}$ und $\cos(x) \neq 0$ für $x \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$.

(2) Für $a \in \mathbb{R}$ ist $(0,\infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^a$ glatt

Denn: $x^a = \underbrace{\exp}_{\text{glatt in } \mathbb{R}}(\underbrace{a \cdot \ln(x)}_{\text{glatt in } (0,\infty)})$ ... glatt wegen Satz 4.3.6.

(3) arcsin, arccos sind glatt in $(-1,1)$
arctan ist glatt in $\mathbb{R}$.

Z.B ist $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ für $x \in (-1,1)$.

- $x \mapsto 1-x^2$ ist glatt in $\mathbb{R}$
- $x \mapsto \sqrt{x}$ ist glatt in $(0,\infty)$ ((2) mit $a=\frac{1}{2}$)
- $x \mapsto \frac{1}{x}$ ist glatt in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$\hookrightarrow$ arcsin' ist glatt in $(-1,1)$ als Komposition von glatten Funktionen

$\Rightarrow$ arcsin selbst ist glatt in $(-1,1)$.

4.4 Potenzreihen und Taylor-Approximation

Ziele: - Potenzreihen ergeben glatte Funktionen
- Approximation von differenzierbaren Funktionen durch Polynome.

Clicker-Frage: $f_n(x) = \sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}$, $f(x) = |x| = \sqrt{x^2}$

Dann gilt:

- f_n ist glatt $\forall n \in \mathbb{N}^*$ da $x^2+\frac{1}{n^2} \in (0,\infty)$ $\forall x \in \mathbb{R}$ und $x \mapsto \sqrt{x}$ in $(0,\infty)$ glatt ist.
- f ist nicht differenzierbar in $x_0 = 0$.

- $f_n \to f$ gleichmässig in $\mathbb{R}$ für $n \to \infty$.

Denn: $$|f_n(x) - f(x)| = \left|\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}} - \sqrt{x^2}\right| = \left|\frac{\overbrace{\left(\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}-\sqrt{x^2}\right)\left(\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{x^2}\right)}^{=\frac{1}{n^2}}}{\left(\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{x^2}\right)}\right|$$

$$= \frac{1}{n^2\left(\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{x^2}\right)} \overset{(x^2 \geq 0)}{\leq} \frac{1}{n^2 \cdot \frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$ (unabhängig von x!)

↳ die Clicker-Frage zeigt, dass es für die Differenzierbarkeit der Grenzfunktion mehr braucht als gleichmässige Konvergenz!

Satz 4.4.1: Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall mit mehr als einem Punkt. Seien $f_n : I \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$, stetig differenzierbare Funktionen. Wir nehmen an, dass:

(i) $(f_n)_{n\geq 1}$ in I gleichmässig konvergiert, $\lim_{n\to\infty} f_n =: f$,

(ii) $(f_n')_{n\geq 1}$ in I gleichmässig konvergiert, $\lim_{n\to\infty} f_n' =: p$

Dann ist f in I differenzierbar und $f' = p$.

Bew: Nach Satz 3.7.4 sind f und p in I stetig (als gleichmässige Grenzwerte stetiger Funktionen).

Zu zeigen: f ist differenzierbar und $f' = p$

Sei $x_0 \in I$.

Idee: Für x nahe bei x_0 und n gross genug gilt:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \overset{\overset{f_n \to f}{\downarrow}}{\approx} \frac{f_n(x)-f_n(x_0)}{x-x_0} \overset{\overset{\text{MWS, } \xi_n \text{ nahe bei } x_0}{\downarrow}}{=} f_n'(\xi_n) \overset{\overset{f_n' \to p}{\downarrow}}{\approx} p(\xi_n) \overset{\overset{\text{Stetigkeit von } p \text{ in } x_0}{\downarrow}}{\approx} p(x_0)$$

Formal: Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $\delta > 0$ und $N \in \mathbb{N}$ so dass

$$(*) \quad |p(x)-p(x_0)| \leq \varepsilon \qquad \forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \cap I$$

(Stetigkeit von p in x_0)

$$(**) \quad |f_n'(\xi)-p(\xi)| \leq \varepsilon \qquad \forall n \geq N, \ \forall \xi \in I.$$

(gleichmässige Konvergenz $f_n' \to p$)

Für $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \cap I$, $x \neq x_0$, gibt es aufgrund des Mittelwertsatzes ein $\xi_n \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \cap I$ so dass

$$\frac{f_n(x)-f_n(x_0)}{x-x_0} = f_n'(\xi_n)$$

Für $n \geq N$ folgt aus $(**)$, dass $\left| \underbrace{\frac{f_n(x)-f_n(x_0)}{x-x_0}}_{f_n'(\xi_n)} - p(\xi_n) \right| \leq \varepsilon$

und aus $(*)$, dass

$$\left| \frac{f_n(x)-f_n(x_0)}{x-x_0} - p(x_0) \right| \overset{\overset{\Delta\text{-Ungl.}}{\downarrow}}{\leq} \overbrace{\left| \frac{f_n(x)-f_n(x_0)}{x-x_0} - p(\xi_n) \right|}^{\leq \varepsilon} + \underbrace{|p(\xi_n)-p(x_0)|}_{\leq \varepsilon}$$

$$\leq 2\varepsilon$$

In der letzten Ungleichung lassen wir $n \to \infty$ gehen und erhalten:

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - p(x_0) \right| \leq 2\varepsilon$$

Da dies für alle $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap I$, $x \neq x_0$, gilt, folgt

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = p(x_0),$$

was $f'(x_0) = p(x_0)$ beweist. $\square$

Anwendung auf Potenzreihen:

Satz 4.4.2: Sei $\sum_{k \geq 0} c_k x^k$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $\rho > 0$. Dann ist für $x_0 \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k$$

in $(x_0 - \rho, x_0 + \rho)$ differenzierbar und für $x \in (x_0 - \rho, x_0 + \rho)$ gilt

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k (x - x_0)^{k-1}$$ ... "abgeleitete Potenzreihe"

die "abgeleitete Potenzreihe" hat denselben Konvergenzradius

Bew: Verwende MC-Frage 4.1 (a), Satz 3.7.11 und Satz 4.4.2. $\square$

in $[x_0 - r, x_0 + r]$ für $0 < r < \rho$ gilt gleichmässige Konvergenz der Partialsummen für die Potenzreihe und die "abgeleitete Potenzreihe"

durch gleichmässige Konvergenz der Partialsummen und ihrer Ableitungen in $[x_0 - r, x_0 + r]$, $0 < r < \rho$, ergibt sich die Aussage

Korollar 4.4.3: Unter den Voraussetzungen von Satz 4.4.2 ist f im $(x_0-\rho, x_0+\rho)$ glatt und

$$f^{(j)}(x) = \sum_{k=j}^{\infty} c_k\, k\cdot(k-1)\cdots(k-j+1)\cdot(x-x_0)^{k-j}$$

Insbesondere: $f^{(j)}(x_0) = c_j \cdot j!$

Bsp: $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} x^k$ hat Konvergenzradius 1. Für $x \in (-1,1)$ gilt:

$$f'(x) = 1 + x + x^2 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$$

Anwendung auf arctan: Sei $g(x) = \arctan'(x)$. Für $x \in (-1,1)$:

$$g(x) = \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2} \overset{\text{geom. Reihe}}{=} 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - + \ldots$$

$c_0 = 1,\ c_1 = 0,\ c_2 = -1,\ c_3 = 0,\ c_4 = 1, \ldots$

$$\Rightarrow \quad g^{(j)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{falls } j \text{ ungerade}, \\ (-1)^{j/2} \cdot j! & \text{falls } j \text{ gerade}, \end{cases}$$

$$\| $$

$$\arctan^{(j+1)}(0)$$

Einfache Lösung der Clicker-Frage:

$$\arctan^{(3)}(0) = g^{(2)}(0) = (-1)\cdot 2! = -2$$

Taylor-Approximation:

Die Diskussion von Potenzreihen macht plausibel, dass eine glatte Funktion f in der Nähe eines Punktes x_0 approximiert werden kann durch

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k$$

wenn n gross genug ist.