<u>Wiederholung:</u> Ist $\sum_{k=0} c_k x^k$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $\rho > 0$, dann ist für jedes $x_0 \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-x_0)^k$$

glatt in $(x_0-\rho, x_0+\rho)$ und für $j \in \mathbb{N}$ gilt

$$f^{(j)}(x) = \sum_{k=j}^{\infty} c_k\, k\cdot(k-1)\cdots(k-j+1)\cdot(x-x_0)^{k-j}$$

Insbesondere: $f^{(j)}(x_0) = c_j \cdot j!$

Ohne Summennotation:

$$f(x) = c_0 + c_1\cancel{(x-x_0)} + c_2\cancel{(x-x_0)^2} + c_3\cancel{(x-x_0)^3} + \cancel{\ldots}$$

$\hookrightarrow f(x_0) = c_0$

$$f'(x) = c_1 + 2c_2\cancel{(x-x_0)} + 3c_3\cancel{(x-x_0)^2} + \cancel{\ldots}$$

$\hookrightarrow f'(x_0) = c_1$

$$f''(x) = 2c_2 + 6c_3(x-x_0) + \ldots$$

$\hookrightarrow f''(x_0) = 2c_2$

$$f'''(x) = 6c_3 + \ldots$$

$\hookrightarrow f'''(x_0) = 6c_3 = 3!\, c_3$

Taylor-Approximation:

Die Diskussion von Polynzreihen macht plausibel, dass eine glatte Funktion f in der Nähe eines Punktes x_0 approximiert werden kann durch

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

wenn n gross genug ist.

In der Tat, wenn $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-x_0)^k$, dann gilt

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \underbrace{c_k}_{\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}} (x-x_0)^k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

gleichmässig in einem Intervall um x_0

Dies motiviert die folgende Definition:

Def: Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall mit mehr als einem Punkt. Sei $n \in \mathbb{N}$, $f: I \to \mathbb{R}$ n-mal differenzierbar und $x_0 \in I$. Das Taylorpolynom der Ordnung n von f in x_0

$$T_n f(x; x_0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

Es ist das eindeutige Polynom p mit Grad $\leq n$ und

$$f(x_0) = p(x_0), \quad f'(x_0) = p'(x_0), \quad \dots, \quad f^{(n)}(x_0) = p^{(n)}(x_0)$$

Beispiel: Die ersten Taylorpolynome von $f(x)=\cos(x)$ im $x_0=0$ sind:

$$1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}-+\dots$$

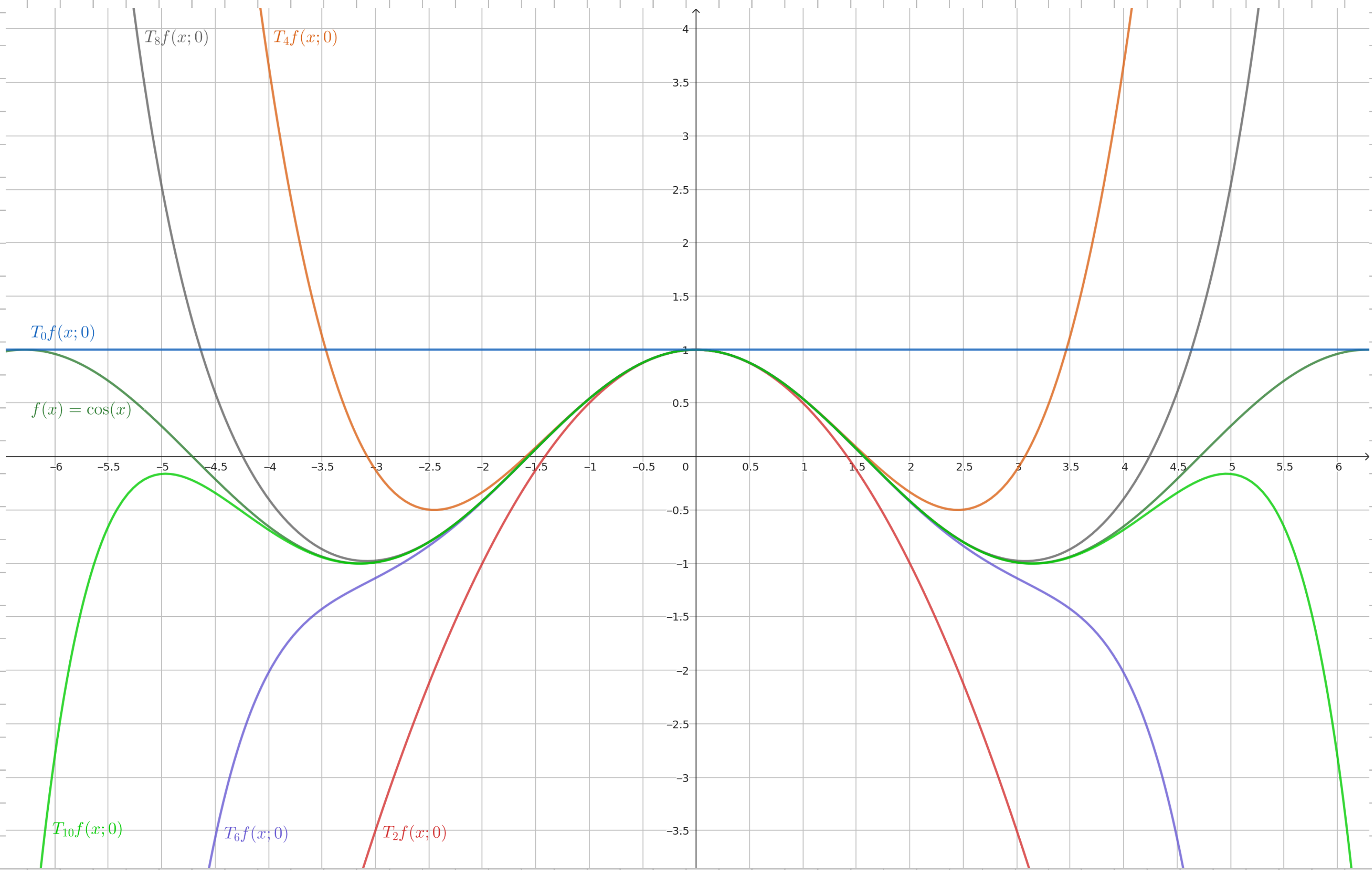
$$T_0 f(x;0) = 1$$

$$T_1 f(x;0) = 1$$

$$T_2 f(x;0) = 1-\frac{x^2}{2}$$

$$T_3 f(x;0) = 1-\frac{x^2}{2}$$

$$T_4 f(x;0) = 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}$$



Clicker-Frage: $f(x) = 1+x-x^2+x^4$.

$$T_2 f(x;1) = ?$$

$$f'(x) = 1 - 2x + 4x^3$$

$$f''(x) = -2 + 12x^2$$

$$\Rightarrow f(1) = 2, \quad f'(1) = 3, \quad f''(1) = 10$$

$$\Rightarrow T_2 f(x;1) = \underbrace{2}_{/0!} + \underbrace{3}_{/1!}(x-1) + \underbrace{5}_{=\frac{10}{2!}}(x-1)^2$$

Satz (Taylor-Approximation)

Seien $a < b$ in $\mathbb{R}$, $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ n-mal stetig differenzierbar und in (a,b) $(n+1)$-mal differenzierbar. Sei $x_0 \in [a,b]$. Dann gibt es für alle $x \in [a,b]$, $x \neq x_0$, ein ξ zwischen x_0 und x mit:

$$f(x) = T_n f(x;x_0) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

Bemerkung: $f(x) - T_n f(x;x_0)$ wird als "Restglied" bezeichnet.

Die Formel $\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ ist die "Restglieddarstellung von Lagrange."

Korollar (Qualitative Version der Taylor-Approximation)

Seien $a < b$ in $\mathbb{R}$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ n-mal stetig differenzierbar.

Sei $x_0 \in [a,b]$. Dann gilt

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - T_n f(x; x_0)}{(x-x_0)^n} = 0$$

"Approximation vom Grad höher als n"

Übung: Finden Sie die entsprechende Aussage für die Tangente an eine Funktion am Anfang unserer Diskussion der Differenzierbarkeit.

Bew. des Korollars: Wir verwenden die Taylorformel für

$\Rightarrow$ für $x \in [a,b]$, $x \neq x_0$, gilt

$$f(x) - T_{n-1} f(x; x_0) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} (x-x_0)^n$$

für ein ξ zwischen x und x_0

$$f(x) - T_n f(x; x_0) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} (\cancel{x-x_0})^n - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (\cancel{x-x_0})^n$$

$$\frac{f(x) - T_n f(x; x_0)}{(x-x_0)^n} = \frac{1}{n!} \left(f^{(n)}(\xi) - f^{(n)}(x_0) \right)$$

Wenn $x \to x_0$, dann gilt auch $\xi \to x_0 \Rightarrow f^{(n)}(\xi) - f^{(n)}(x_0) \to 0$ da $f^{(n)}$ stetig ist $\Rightarrow \frac{f(x) - T_n f(x; x_0)}{(x-x_0)^n} \to 0$ für $x \to x_0$ $\square$

Folgerungen für lokale Extrema:

Korollar 4.4.7: (leicht umformuliert)

Sei $n \neq 1$, $a < b$ in $\mathbb{R}$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ n-mal stetig differenzierbar und $x_0 \in (a,b)$

Annahme: $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ und $f^{(n)}(x_0) \neq 0$

Dann gilt:

(1) n ungerade $\Longrightarrow$ f hat in x_0 <u>kein</u> lokales Extremum

(2) n gerade und $f^{(n)}(x_0) > 0 \Rightarrow f$ hat in x_0 ein striktes lokales Minimum

$\exists \delta > 0 : \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\} :$
$f(x) > f(x_0)$

(3) n gerade und $f^{(n)}(x_0) < 0 \Rightarrow f$ hat in x_0 ein striktes lokales Maximum.

Korollar 4.4.8 (der Spezialfall $n=2$)

Seien $a < b$ in $\mathbb{R}$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und $x_0 \in (a,b)$.

Annahme: $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) \neq 0$. Dann gilt:

(1) $f''(x_0) > 0 \Rightarrow f$ hat in x_0 ein (striktes) lokales Minimum.

(2) $f''(x_0) < 0 \Rightarrow f$ hat in x_0 ein (striktes) lokales Maximum.

Beispiel 4.4.9: $f(x) = x^4 - x^2 + 1$

Was sind die lokalen Extrema von f?

Die Kandidaten erhalten wir durch Lösen der Gleichung

$$f'(x) = 0$$
$$\shortparallel$$
$$4x^3 - 2x = 2x(2x^2 - 1) \iff \begin{array}{l} x_0 = 0 \\ x_{1,2} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \end{array}$$

Um zu entscheiden, ob die Kandidaten tatsächlich Extremstellen sind, und wenn ja, welcher Art, berechnen wir höhere Ableitungen:

$$f''(x) = 12x^2 - 2 = 2 \cdot (6x^2 - 1)$$

$$f''(x_0) = -2 < 0 \qquad f''(x_{1,2}) = f''\left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 4 > 0$$

Korollar 4.4.8 $\Rightarrow$ x_0 ist lokales Maximum

$x_{1,2}$ sind lokale Minima

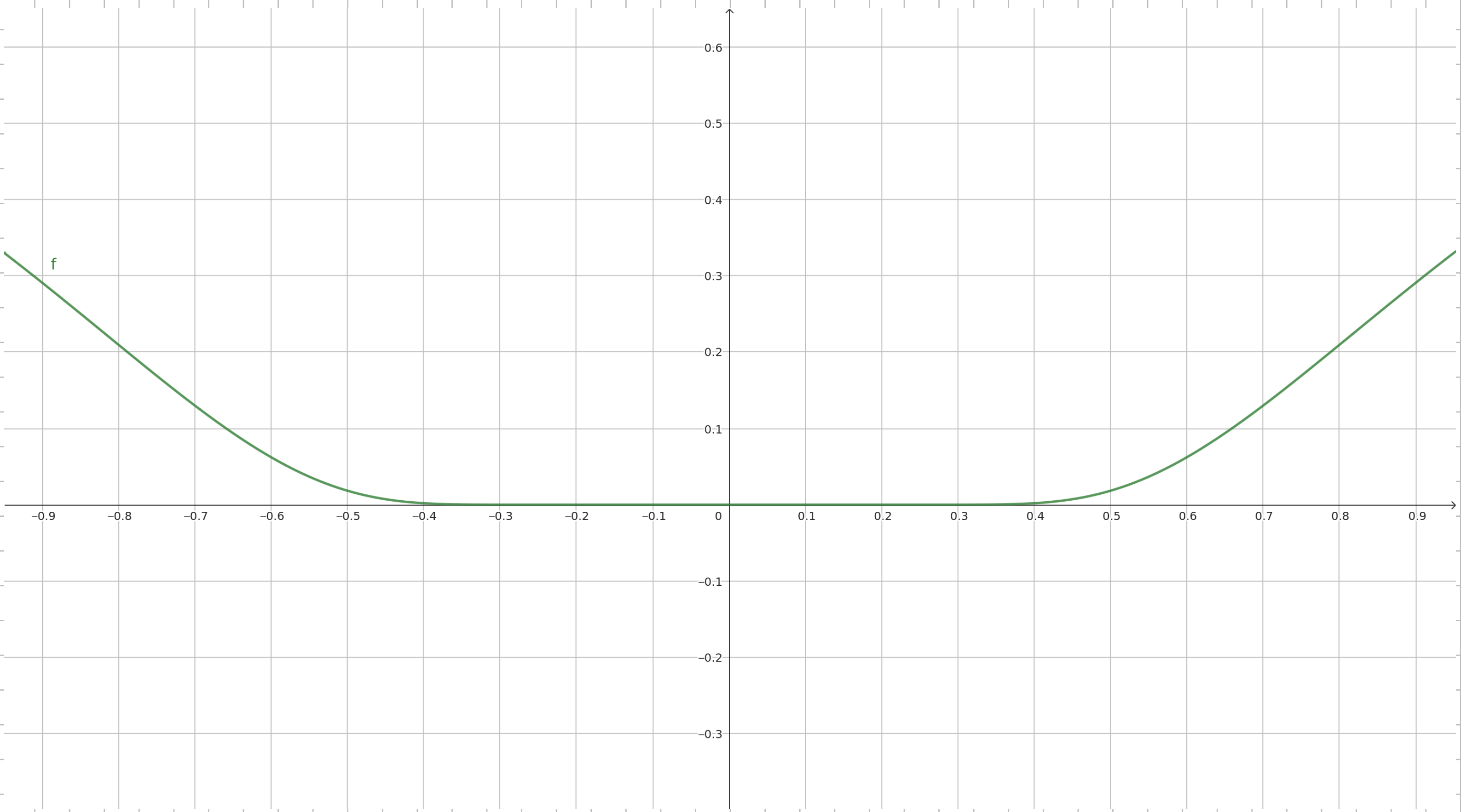
Caveat: Es kann sein, dass eine glatte Funktion in einem Punkt ein striktes lokales Extremum hat, obwohl alle Ableitungen in diesem Punkt $= 0$ sind.

z.B. die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

aus Beispiel 4.4.4.

(Striktes lokales Minimum in 0, aber $f^{(k)}(0) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$.)

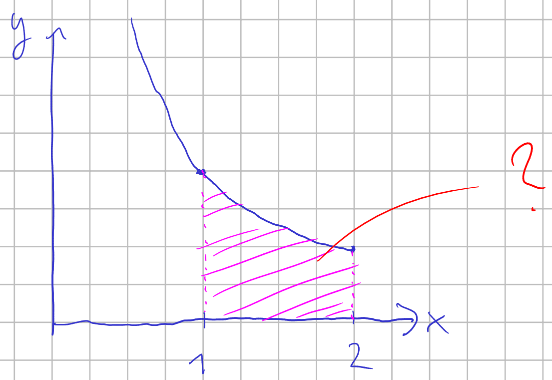


Kapitel 5: Das Riemann-Integral

<u>Motivation:</u> Berechnung von Flächeninhalten

z.B.:

- Was ist der Flächeninhalt eines Kreises?
- Was ist die Fläche zwischen $[1,2] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ und der x-Achse?



5.1 Definition und Integrabilitätskriterien

Im Folgenden sind $a < b$ in $\mathbb{R}$ und $I = [a, b]$

<u>Def 5.1.1:</u> Eine <u>Partition</u> von I ist eine endliche Teilmenge P von I mit $\{a, b\} \subset P$

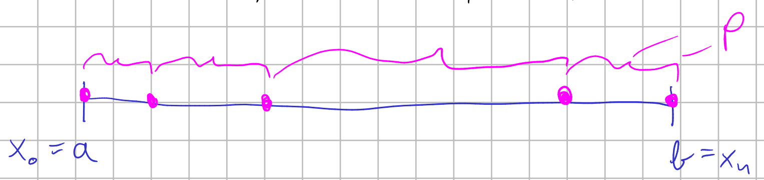
Sind P, P' Partitionen von I, dann heisst P' <u>Verfeinerung</u> von P wenn $P \subset P'$

Bemerkung:

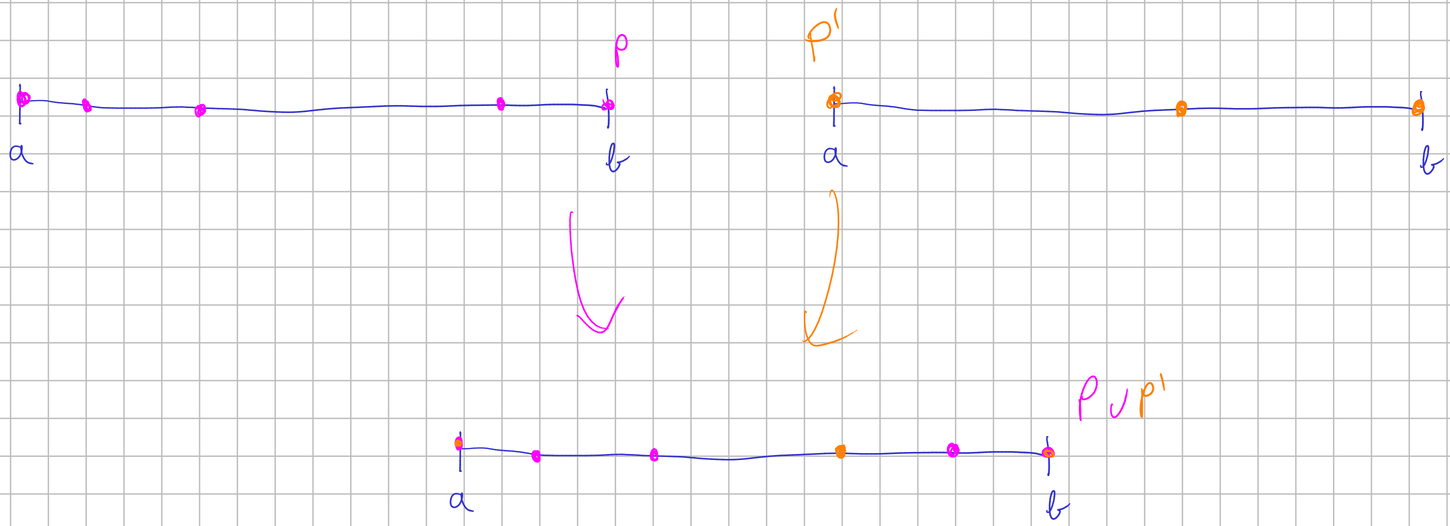
$|P| = n+1$

- Eine Partition $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ von I, $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, teilt $I = [a,b]$ in n Teilintervalle

  $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$



- Zwei Partitionen P, P' besitzen immer eine gemeinsame Verfeinerung, nämlich $P \cup P'$



Sei nun $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion, d.h. es gibt $M \geq 0$ mit $|f(x)| \leq M \quad \forall x \in [a,b]$.

Für eine Partition $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ von I, $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, setzen wir $\delta_i = x_i - x_{i-1} \quad (1 \leq i \leq n)$

Länge des Teilintervalls $[x_{i-1}, x_i]$

Def: $s(f,P) := \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\delta_i f_i}$ $f_i := \inf_{x_{i-1} \le x \le x_i} f(x)$

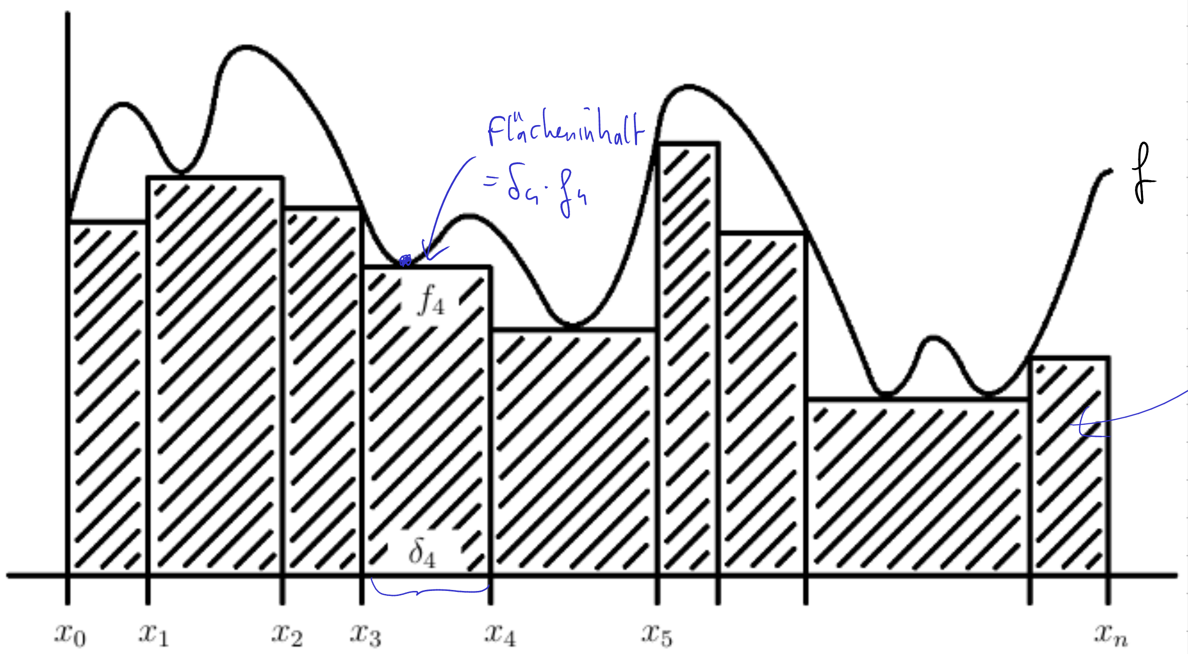
"Untersumme von f"

Flächeninhalt eines Rechtecks über $[x_{i-1}, x_i]$ unter dem Graphen von f

$S(f,P) := \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\delta_i F_i}$ $F_i := \sup_{x_{i-1} \le x \le x_i} f(x)$

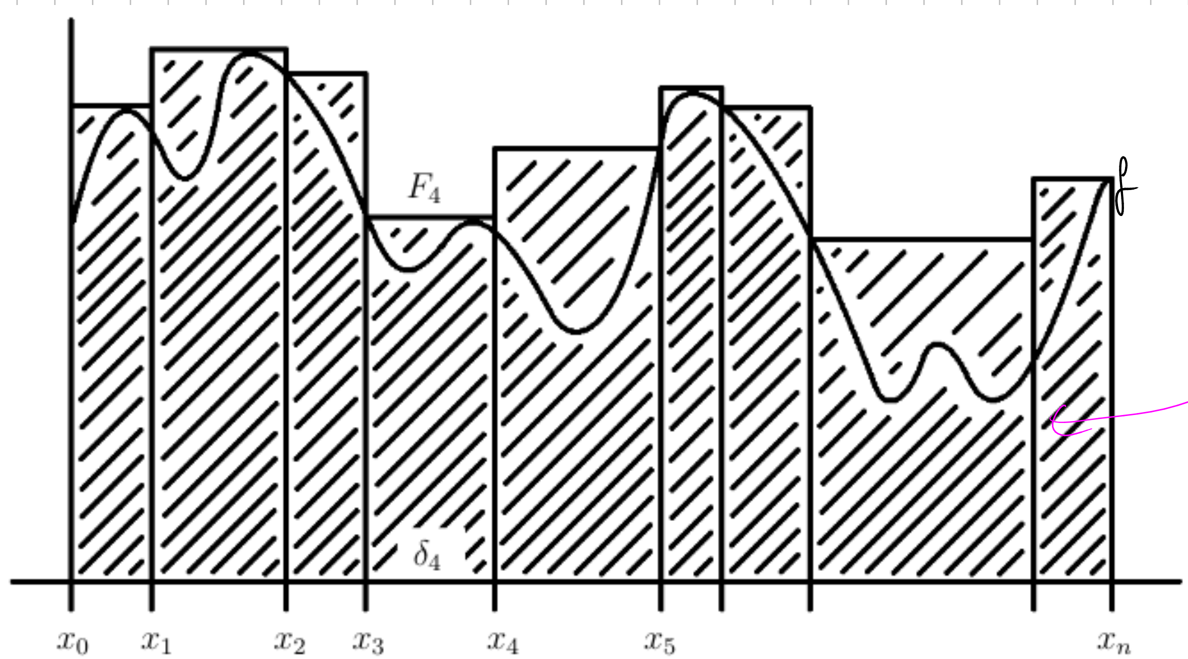
"Obersumme von f"

Flächeninhalt eines Rechtecks über $[x_{i-1}, x_i]$ über dem Graphen von f



$s(f,P)$ (schraffiert)

$P = \{x_0, \dots, x_n\}$



$S(f,P)$ (schraffiert)

$P = \{x_0, \dots, x_n\}$

__Merke:__ Wenn $|f(x)| \leq M \quad \forall x \in [a,b]$, dann gilt:

$$-M \leq f_i \leq F_i \leq M$$

$\Rightarrow$ für eine Partition P sind $s(f,P)$, $S(f,P)$ wohldefiniert und

$$-M(b-a) \leq s(f,P) \leq S(f,P) \leq M(b-a)$$

__Lemma 5.1.2:__

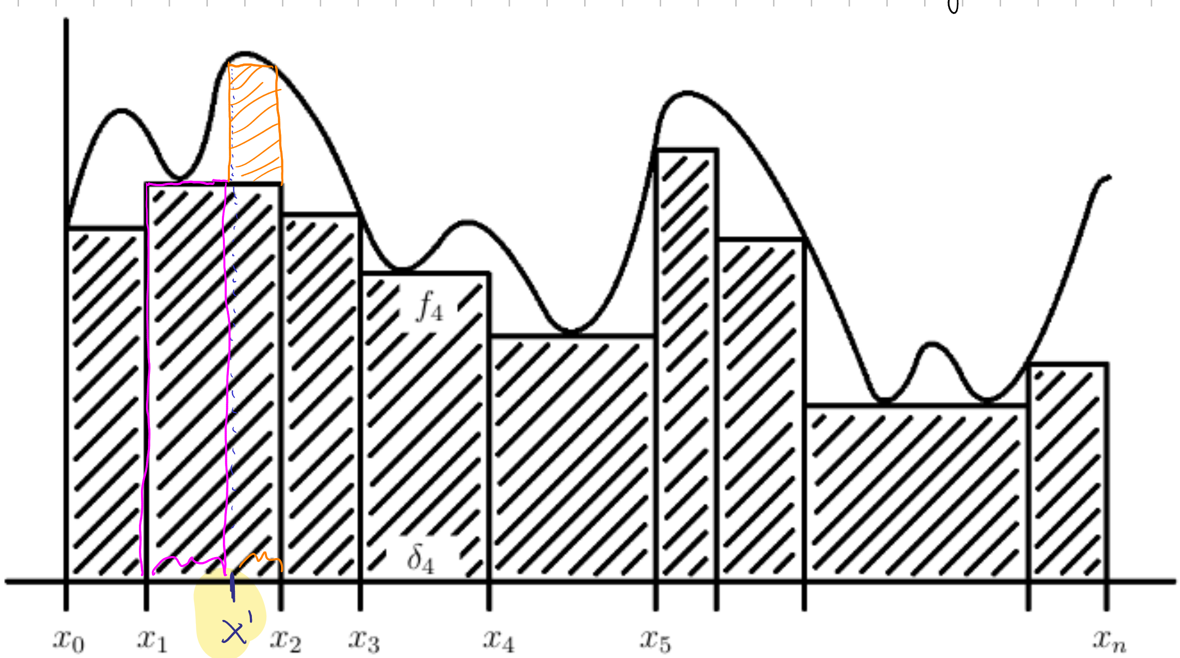
(1) Ist P' eine Verfeinerung von P, dann gilt

$$s(f,P) \leq s(f,P') \leq S(f,P') \leq S(f,P)$$

(2) Für beliebige Partitionen P_1, P_2 gilt

$$s(f,P_1) \leq S(f,P_2)$$

__Bew. skizze für einen Teil:__ Wenn $P' = P \cup \{x'\}$, dann ändert sich das Bild für die Untersumme wie folgt:



$\Rightarrow$

$s(f,P') =$

$s(f,P) +$ " "

$\geq s(f,P)$

Obersumme analog. Für (2) verwende (1) und die gemeinsame Verfeinerung $P_1 \vee P_2$. "$\square$"

<u>Def:</u> Sei $\mathcal{P}(I)$ die Menge aller Partitionen von I.

$$s(f) := \sup_{P \in \mathcal{P}(I)} s(f, P) \quad \ldots \text{"Unterintegral"}$$

$$S(f) := \inf_{P \in \mathcal{P}(I)} S(f, P) \quad \ldots \text{"Oberintegral"}$$

<u>Merke:</u> Aus Lemma 5.1.2 (2) folgt $s(f) \leq S(f)$

<u>Def 5.1.3:</u> Eine beschränkte Funktion $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ ist <u>Riemann-integrierbar</u> (oder kurz: <u>integrierbar</u>) falls

$$s(f) = S(f).$$

In diesem Fall bezeichnen wir den gemeinsamen Wert von $s(f)$ und $S(f)$ als

$$\int_a^b f(x)\, dx. \quad \ldots \text{(Riemann)-Integral von } f \text{ über } [a, b]$$