Wiederholung: $I = [a,b]$, $f: I \to \mathbb{R}$ beschränkt.

$P = \{a = x_0, x_1, \dots, x_n = b\}$ Partition von I.

Untersumme: $s(f,P) = \sum_{i=1}^{n} \inf_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x) \cdot (x_i - x_{i-1})$

Obersumme: $S(f,P) = \sum_{i=1}^{n} \sup_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x) \cdot (x_i - x_{i-1})$

Lemma 5.1.2: (1) P' Verfeinerung von P, dann gilt

$$s(f,P) \leq s(f,P') \leq S(f,P') \leq S(f,P)$$

(2) P_1, P_2 beliebige Partitionen, dann gilt

$$s(f,P_1) \leq S(f,P_2)$$

Unterintegral: $s(f) = \sup_{P \in \mathcal{P}(I)} s(f,P)$

Oberintegral: $S(f) = \inf_{P \in \mathcal{P}(I)} S(f,P)$

wobei $\mathcal{P}(I) := \{\text{Partitionen von } I\}$

f ist (Riemann-)integrierbar falls $s(f) = S(f) =: \int_a^b f(x)\,dx$

Satz 5.1.4: Eine beschränkte Funktion $f: I \to \mathbb{R}$ ist genau dann integrierbar, wenn:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists P \in \mathcal{P}(I): \quad S(f,P) - s(f,P) < \varepsilon$$

<u>Bew:</u> „$\Rightarrow$" Sei $\varepsilon > 0$. Integrierbarkeit impliziert, dass es Partitionen P_1, P_2 gibt mit $S(f, P_1) - s(f, P_2) < \varepsilon$

Setze $P := P_1 \cup P_2$ ... gemeinsame Verfeinerung.

Dann gilt gemäss Lemma 5.1.2 (1):

$$S(f,P) - s(f,P) \leq S(f,P_1) - s(f,P_2) < \varepsilon.$$

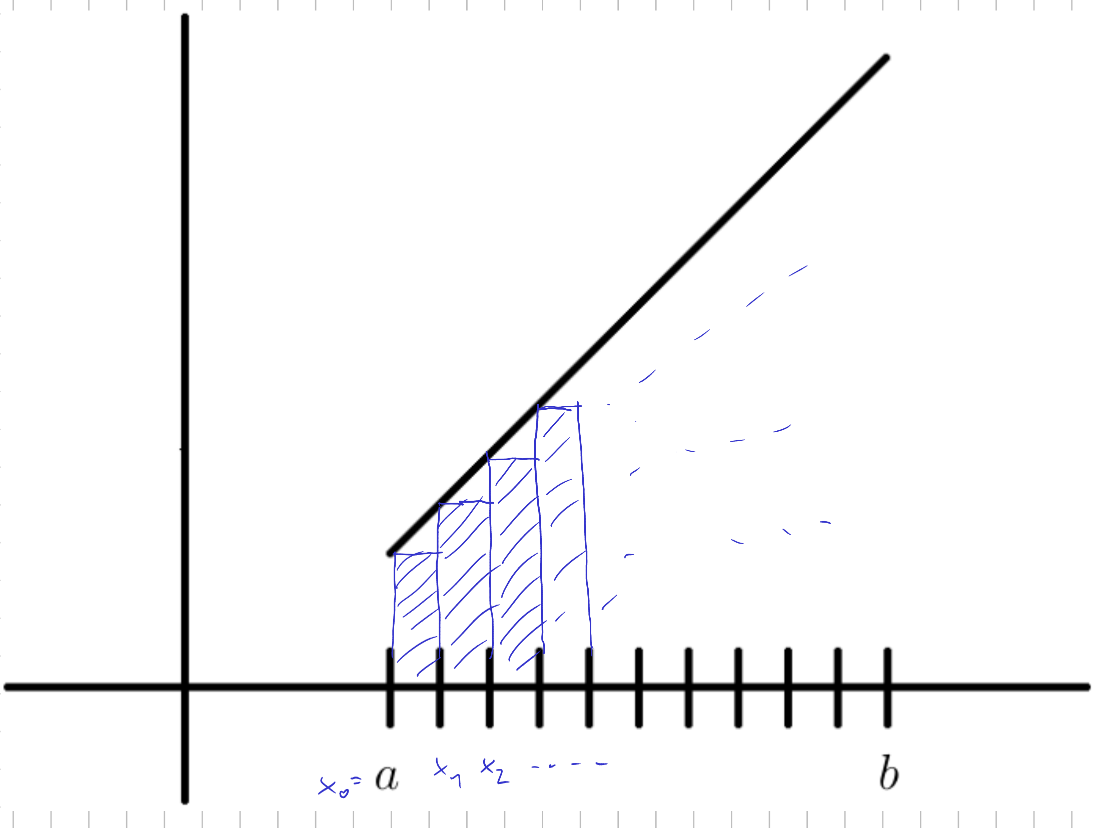
„$\Leftarrow$" Aus der Bedingung folgt dass $\forall \varepsilon > 0$ ein $P \in \mathcal{P}(I)$ existiert mit $S(f,P) - s(f,P) < \varepsilon$.

$$\Rightarrow S(f) - s(f) \leq S(f,P) - s(f,P) < \varepsilon.$$

Da dies $\forall \varepsilon > 0$ gilt, folgt zusammen mit $s(f) \leq S(f)$, dass $S(f) = s(f)$ $\square$

<u>Beispiel 5.1.5:</u> $f(x) = x$ auf $[a, b]$

Sei $P_n = \{\overbrace{a + i \cdot h}^{x_i},\ i = 0, \dots, n\}$ wobei $h = \frac{b-a}{n}$



$$s(f,P_n) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\inf_{x_{i-1}\le x\le x_i} x}_{x_{i-1}} \underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{h}$$

Verwende: $\sum_{i=0}^{n-1} i = \frac{n(n-1)}{2}$

$$= \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} x_i = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (a + i\cdot h)$$

$$= \frac{b-a}{\cancel{n}} \cdot \cancel{n} a + \frac{(b-a)^2}{n^2} \frac{(n-1)\cancel{n}}{2} = (b-a)\cdot a + \frac{(b-a)^2}{2} \cdot \underbrace{\left(\frac{n-1}{n}\right)}_{\to 1}$$

Analog: $S(f,P_n) = (b-a)\cdot a + \frac{(b-a)^2}{2} \cdot \underbrace{\left(\frac{n+1}{n}\right)}_{\to 1}$ für $n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty} s(f,P_n) = \lim_{n\to\infty} S(f,P_n) = \ldots = \frac{b^2-a^2}{2}$$

Daraus folgt, dass $s(f) = S(f) = \frac{b^2-a^2}{2}$

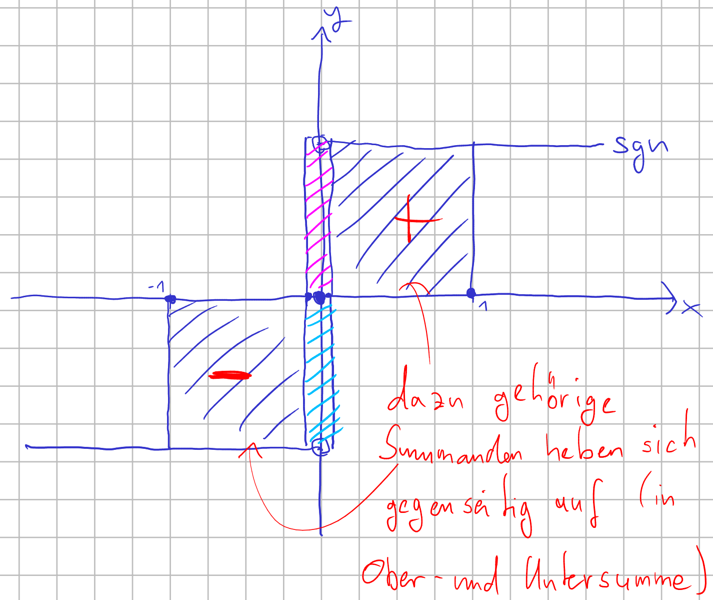
$\Rightarrow$ f ist integrierbar und $\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b^2-a^2}{2}$

Clicker-Frage: $\mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & x<0, \\ 0, & x=0, \\ 1, & x>0. \end{cases}$ $\int_{-1}^{1} \mathrm{sgn}(x)\,dx = ?$

Betrachte $P_n = \{-1, -\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, 1\}$

$s(\mathrm{sgn}, P_n) = -\frac{2}{n}$

$S(\mathrm{sgn}, P_n) = \frac{2}{n}$



$$\lim_{n\to\infty} s(\mathrm{sgn}, P_n) = \lim_{n\to\infty} S(\mathrm{sgn}, P_n) = 0$$

$\Rightarrow$ wie im Beispiel oben folgt Integrierbarkeit und dass

$$\int_{-1}^{1} \operatorname{sgn}(x)\,dx = 0.$$

<u>Beispiel 5.1.6:</u> Sei $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}1, & x \text{ rational,}\\ 0, & x \text{ irrational.}\end{cases}$

Für jede Partition $P=\{0=x_0,\dots,x_n=1\}$ von $[0,1]$ gilt

$$s(f,P)=0 \qquad\qquad S(f,P)=1$$

da jedes Teilintervall $[x_{i-1},x_i]$ sowohl rationale als auch irrationale Zahlen enthält, und somit

$$\inf_{x_{i-1}\le x\le x_i} f(x) = 0 \qquad\qquad \sup_{x_{i-1}\le x\le x_i} f(x) = 1$$

gilt.

$\Rightarrow$ f ist über $[0,1]$ <u>nicht</u> integrierbar.

Wir behandeln nun eine "gleichmässige Version" von Satz 5.1.4.
Für $\delta>0$ bezeichnen wir mit $\mathcal{P}_\delta(I)$ die Menge aller Partitionen $P=\{a=x_0,x_1,\dots,x_n=b\}$ von $I=[a,b]$ mit

$$\delta(P) := \max_{1\le i\le n}(x_i-x_{i-1}) < \delta$$

"Maschenweite von P"

<u>Satz 5.1.8</u>: Eine beschränkte Funktion $f: I \to \mathbb{R}$ ist genau dann integrierbar, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall P \in \mathcal{P}_\delta(I) : \ S(f,P) - s(f,P) < \varepsilon.$$

<u>Beweisskizze</u>: Wir nehmen an f ist integrierbar. Dann gibt es nach Satz 5.1.4 für $\varepsilon > 0$ eine Partition $P = \{a = x_0, \dots, x_n = b\}$ von I mit $S(f,P) - s(f,P) < \varepsilon$.

Angenommen Q ist eine weitere Partition mit "kleiner" Maschenweite. Für die gemeinsame Verfeinerung $P \cup Q$ gilt jedenfalls:

$$S(f, P \cup Q) - s(f, P \cup Q) < \varepsilon$$

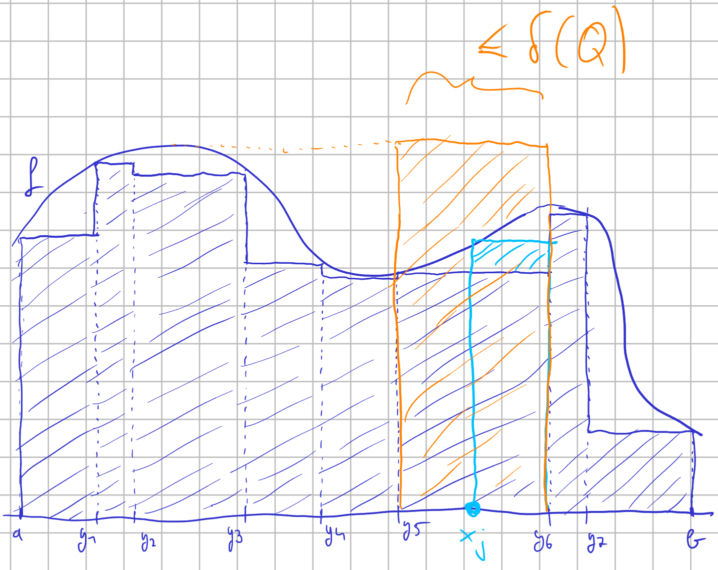
Es reicht also, sicherzustellen, dass sich $S(f,Q)$ von $S(f, P \cup Q)$ und $s(f,Q)$ von $s(f, P \cup Q)$ nicht "zu stark" unterscheiden.

Wir illustrieren dies anhand der Untersumme.

Wenn $Q = \{a = y_0, \dots, y_m = b\}$, dann ist

$$s(f,Q) = \sum_{i=1}^{m} \inf_{y_{i-1} \le x \le y_i} f(x) \cdot (y_i - y_{i-1})$$

Die Summanden der Untersumme $s(f, P \cup Q)$ sind dieselben wie für $s(f,Q)$, ausser wenn eins der x_j in (y_{i-1}, y_i) liegt.



... der Unterschied " " in der Untersumme ist beschränkt durch das orange Rechteck

(wenn f auch negative Werte annimmt müsste man noch ein oranges Rechteck unter der x-Achse hinzufügen)

Da P nur endlich viele Punkte x_i enthält (und fixiert ist), können wir garantieren, dass der Unterschied zwischen $s(f, Q)$ und $s(f, P \cup Q)$ beliebig klein ist, indem wir die Maschenweite $\delta(Q)$ genügend klein wählen (da dann die Breite des orangen Rechtecks auch klein ist, und dessen Höhe ist beschränkt, da f beschränkt ist). "$\square$"

Über den obigen Satz erhält man eine weitere klassische Charakterisierung des Integrals.

<u>Korollar 5.1.9:</u> Eine beschränkte Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist genau dann integrierbar mit Integral $A = \int_a^b f(x)\,dx$, falls

$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 : \;\; \forall P = \{a = x_0, \dots, x_n = b\}$ mit $\delta(P) < \delta$ und

$\forall \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$:

beliebige Zwischenstellen

$$\left| A - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \right| < \varepsilon$$

"Riemann-Summe"

("Wenn die Maschenweite der Partition gegen 0 geht, dann konvergieren die Riemann-Summen gegen das Integral, unabhängig von der Wahl der Zwischenstellen")

5.2 Integrierbare Funktionen

Satz 5.2.1 + 5.2.10: Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt und integrierbar, und sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind $f+g$, $\lambda \cdot f$, $f \cdot g$, $|f|$, $\max(f,g)$, $\min(f,g)$ integrierbar.

Falls $\beta > 0$ existiert, so dass $|g(x)| \geq \beta$ $\forall x \in [a,b]$ dann ist auch $\frac{f}{g}$ integrierbar.

Das Integral ist linear:

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx$$

$$\int_a^b \lambda \cdot f(x)\, dx = \lambda \cdot \int_a^b f(x)\, dx.$$

<u>Bew:</u> Wir beweisen nur die Additivität des Integrals (und dabei auch die Integrierbarkeit von $f+g$).

Wir argumentieren über Riemann-Summen.

$\{x_0, \dots, x_n\}$ $\shortparallel$

Sei $\varepsilon > 0$ und $\delta > 0$ so gewählt, dass für jede Partition P mit $\delta(P) < \delta$ und Zwischenstellen $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ gilt, dass

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \right| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \left| \int_a^b g(x)\,dx - \sum_{i=1}^n g(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dann folgt

Riemann-Summe für $f+g$

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx - \sum_{i=1}^n \big(f(\xi_i) + g(\xi_i)\big)(x_i - x_{i-1}) \right|$$

Δ-Ungl.

$$\leq \left| \int_a^b f(x)\,dx - \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \right| + \left| \int_a^b g(x)\,dx - \sum_{i=1}^n g(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \right| < \varepsilon$$

Da $\sum_{i=1}^n \big(f(\xi_i) + g(\xi_i)\big)(x_i - x_{i-1})$ eine Riemann-Summe für $f+g$ ist, ist Korollar 5.1.9 anwendbar mit

$$A = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$$

Die Schlussfolgerung aus dem Korollar ist, dass $f+g$ integrierbar ist und

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = A = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

$\square$

<u>Korollar 5.2.3</u>: Sei P ein Polynom und Q ein Polynom, das auf $[a,b]$ keine Nullstelle besitzt. Dann ist $\frac{P}{Q}$ über $[a,b]$ integrierbar.

Insbesondere ist jedes Polynom $P = \frac{P}{1}$ über $[a,b]$ integrierbar.

<u>Clicker-Frage</u>: Seien $f, g : [a,b] \to [0,\infty)$ beschränkt, integrierbar.

Was ist der Zusammenhang zwischen

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx \quad \text{und} \quad \left(\int_a^b f(x)\,dx\right)\cdot\left(\int_a^b g(x)\,dx\right) \quad ?$$

Setze $f = 1$, $g = 1$. Dann ist:

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = b-a, \qquad \underbrace{\left(\int_a^b f(x)\,dx\right)}_{=b-a}\cdot\underbrace{\left(\int_a^b g(x)\,dx\right)}_{=b-a} = (b-a)^2$$

Wenn $b-a > 1$, dann ist $(b-a)^2 > b-a$, und wenn $0 < b-a < 1$, dann ist $(b-a)^2 < b-a$

$\Longrightarrow$ es gibt <u>keinen</u> allgemeingültigen Zusammenhang.

Jetzt: Integrierbarkeit von stetigen Funktionen.

Satz 5.2.6: Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig. Dann gilt:

$$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0 : \forall x,y\in[a,b] : |x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon$$

"Stetige Funktionen auf kompakten Intervallen sind gleichmässig stetig".

Bew: Wenn nicht, dann gilt:

$$\exists \varepsilon>0 : \forall \delta>0\ \exists x,y\in[a,b] : |x-y|<\delta \ \wedge\ |f(x)-f(y)|\geq\varepsilon.$$

Dann gibt es für $\delta_n=\frac{1}{n}$ Folgen $(x_n)_{n\geq1}$, $(y_n)_{n\geq1}$ mit

$$|x_n-y_n|<\delta_n=\frac{1}{n} \quad\wedge\quad |f(x_n)-f(y_n)|\geq\varepsilon$$

Bolzano-Weierstrass $\Rightarrow$ es gibt eine konvergente Teilfolge $(y_{\ell(n)})_{n\geq1}$.

Wegen $|x_{\ell(n)}-y_{\ell(n)}|<\frac{1}{\ell(n)}$ konvergiert dann auch $(x_{\ell(n)})_{n\geq1}$ mit gleichem Grenzwert

$$y:=\lim_{n\to\infty} y_{\ell(n)}=\lim_{n\to\infty} x_{\ell(n)}\in[a,b]$$

Stetigkeit von f in y impliziert

$$\lim_{n\to\infty}\underbrace{|f(x_{\ell(n)})-f(y_{\ell(n)})|} = |f(y)-f(y)|=0.$$

Aber das ist $\geq\varepsilon$ $\forall n\geq1$! $\Rightarrow$ Widerspruch $\square$

Satz 5.2.7: Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig. Dann ist f integrierbar.

Bew: Min-Max-Satz $\Rightarrow$ f ist beschränkt.

Satz 5.2.6 $\Rightarrow$ f ist gleichmässig stetig.

Gegeben $\varepsilon>0$ wähle $\delta>0$ so dass für $x,y\in[a,b]$ mit $|x-y|<\delta$ immer $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$ gilt.

Wenn $P=\{a=x_0,\dots,x_n=b\}$ eine Partition ist mit $\delta(P)<\delta$ dann gilt für $x,y\in[x_{i-1},x_i]$, dass $|x-y|<\delta$, also $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$

$$\Rightarrow \sup_{x_{i-1}\le x\le x_i} f(x)-\inf_{x_{i-1}\le y\le x_i} f(y)\le\varepsilon$$

$$\Rightarrow S(f,P)-s(f,P)=\sum_{i=1}^{n}\underbrace{\left(\sup_{x_{i-1}\le x\le x_i} f(x)-\inf_{x_{i-1}\le y\le x_i} f(y)\right)}_{\le\varepsilon}(x_i-x_{i-1})$$

$$\le\varepsilon\cdot\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})=\varepsilon\cdot(b-a).$$

Also ist f nach Satz 5.1.4 integrierbar über $[a,b]$. $\square$

Es gibt auch Klassen von Funktionen, die unstetig sein können, und trotzdem integrierbar sind z.B.:

Satz 5.2.8: Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ monoton. Dann ist f integrierbar.

Bew: siehe Skript.