Wiederholung:

- stetige Funktionen auf kompakten Intervallen und monotone Funktionen auf kompakten Intervallen sind integrierbar

- Linearität des Integrals:

$$\int_a^b (\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x))\, dx = \lambda_1 \int_a^b f_1(x)\, dx + \lambda_2 \int_a^b f_2(x)\, dx$$

Heute:
- Ungleichungen für Integrale
- Mittelwertsatz der Integralrechnung
- Fundamentalsatz der Analysis / Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.

Clicker-Frage: Was ist der Wert von $\int_{-1}^{1} \sin(x)^{11}\, dx$?

Antwort: 0

Da $x \mapsto \sin(x)^{11}$ eine ungerade Funktion ist, gilt

$$\int_{-1}^{0} \sin(x)^{11}\, dx = - \underbrace{\int_{0}^{1} \sin(x)^{11}\, dx}_{?}$$

... (dieses Integral müssen wir für diese Aufgabe nicht kennen)

$$\Rightarrow \int_{-1}^{1} \sin(x)^{11}\, dx = \int_{-1}^{0} \sin(x)^{11}\, dx + \int_{0}^{1} \sin(x)^{11}\, dx = 0.$$

5.3 Ungleichungen und der Mittelwertsatz

Satz 5.3.1: Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt, integrierbar und $f \leq g$ (d.h. $f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a,b]$)

Dann gilt:
$$\int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b g(x)\, dx$$

"Monotonie des Integrals"

Bew: Betrachte die Differenz $g-f$, welche ≥ 0 ist. $\square$

Korollar 5.3.2: Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt, integrierbar.

Dann gilt:
$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx$$

"Dreiecksungleichung für Integrale"

Bew: Wende den obigen Satz auf $-|f| \leq f \leq |f|$ an. $\square$

Nun eine Ungleichung für das Integral eines Produkts $f \cdot g$ (vgl. das negative Resultat aus der Clicker-Frage in der letzten Vorlesung).

Satz 5.3.3: (Cauchy-Schwarz-Ungleichung)

Seien $f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt, integrierbar. Dann gilt:

$$\left| \int_a^b f(x) \cdot g(x)\, dx \right| \leq \sqrt{\int_a^b f(x)^2 dx} \cdot \sqrt{\int_a^b g(x)^2 dx} \quad \Leftrightarrow \quad |B| \leq \sqrt{AC}$$

Bew: Aus Satz 5.2.1 folgt, dass $f \cdot g, f^2, g^2$ beschränkt und integrierbar sind. Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

$$0 \overset{\text{Monotonie}}{\leq} \int_a^b \overbrace{(f(x) - \lambda \cdot g(x))^2}^{\geq 0} dx =$$

$$= \underbrace{\int_a^b f(x)^2 dx}_{A} - 2\lambda \underbrace{\int_a^b f(x) g(x)\, dx}_{B} + \lambda^2 \underbrace{\int_a^b g(x)^2 dx}_{C}$$

D.h.: $0 \leq A - 2\lambda B + \lambda^2 C \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

Fall 1: $C = 0$. Dann gilt: $0 \leq \underbrace{A - 2\lambda B}_{\text{... Gerade mit Steigung } -2B} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

Wenn die Steigung $-2B \neq 0$ wäre, gäbe es $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $A - 2\lambda B < 0$.
Daher muss $B = 0$ sein. D.h. die Ungleichung $|B| \leq \sqrt{AC}$ gilt.

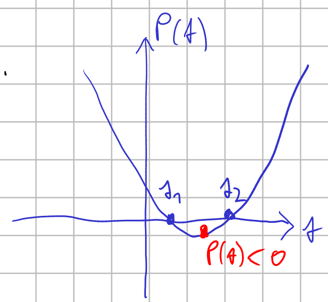
Fall 2: $C > 0$.

Dann ist $P(\lambda) = A - 2\lambda B + C\lambda^2$ eine nach oben offene Parabel. Die Nullstellen von P sind:

$$t_{1/2} = \frac{\cancel{2}B \pm \sqrt{\cancel{4}B^2 - \cancel{4}AC}}{\cancel{2}C} = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{C}$$

Wäre $B^2 > AC$ ↯, dann hätte P zwei verschiedene Nullstellen und P wäre zwischen t_1 und t_2 negativ.

Dies wäre ein Widerspruch zu $P(t) \geq 0 \;\; \forall t \in \mathbb{R}$.



$\Longrightarrow B^2 \leq AC \quad \Longleftrightarrow \quad |B| \leq \sqrt{AC}$

was die zu zeigende Ungleichung ist.

<u>Fall 3:</u> $C < 0$. Kann nicht eintreten, da dann $P(t)$ eine nach <u>unten</u> offene Parabel ist $\Rightarrow$ es gibt $t \in \mathbb{R}$ mit $P(t) < 0$.

$\square$

Für die folgenden Diskussionen führen wir zusätzliche Konventionen ein: (vgl. Bemerkung 5.2.9)

$$\int_a^a f(x)\,dx := 0 \qquad \int_b^a f(x)\,dx := -\int_a^b f(x)\,dx \quad \text{(wenn } a < b\text{)}$$

Dann gilt für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ und eine integrierbare Funktion f

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

(Merke: es muss hier nicht $a < b < c$ gelten)

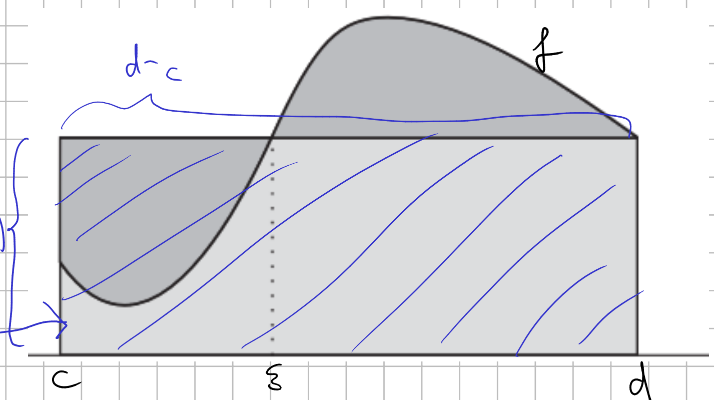
Num:

Satz 5.3.4: (Mittelwertsatz der Integralrechnung)

Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig. Dann gibt es für alle $c,d\in[a,b]$ ein ξ zwischen c und d mit:

$$\int_c^d f(x)\,dx = \underbrace{f(\xi)(d-c)}_{}$$

Fläche dieses Rechtecks



Bew: O.B.d.A. können wir $c<d$ annehmen (denn der Fall $c=d$ ist klar und falls $c>d$ vertauschen wir einfach c und d).

Nach dem Min-Max-Satz gibt es $u,v\in[c,d]$ mit

$$f(u)\le f(x)\le f(v)\qquad \forall x\in[c,d]$$

Monotonie des Integrals impliziert

$$\int_c^d f(u)\,dx \le \int_c^d f(x)\,dx \le \int_c^d f(v)\,dx$$

$$\Rightarrow\quad f(u)\cdot(d-c) \le \int_c^d f(x)\,dx \le f(v)(d-c).$$

$$\Rightarrow\quad f(u) \le \frac{1}{d-c}\int_c^d f(x)\,dx \le f(v)$$

Zwischenwertsatz $\Rightarrow \exists\, \xi \in [c,d]$ mit

$$f(\xi) = \frac{1}{d-c}\int_c^d f(x)\,dx \quad \Rightarrow \int_c^d f(x)\,dx = f(\xi)(d-c) \qquad \square$$

<u>Beispiel 5.3.5:</u> Betrachte $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \le x < \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \le x \le 1 \end{cases}$

Dann ist $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = \overbrace{\int_0^{\frac{1}{2}} 0\,dx}^{0} + \overbrace{\int_{\frac{1}{2}}^1 1\,dx}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$

aber es gibt <u>kein</u> $\xi \in [0,1]$ mit $f(\xi) = \frac{1}{2}$.

Dies zeigt, dass Stetigkeit eine wichtige Voraussetzung in obigem Satz ist.

5.4 Der Fundamentalsatz der Analysis / Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

"Das Integral ist die Umkehroperation der Ableitung."

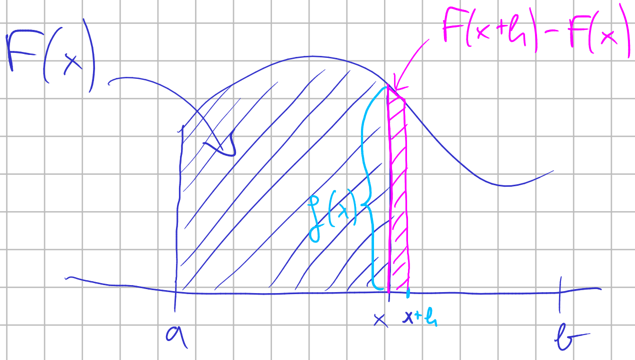
<u>Satz 5.4.1:</u> Seien $c \in [a,b]$ und $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig.

Dann ist die Funktion

$$F(x) = \int_c^x f(t)\,dt \qquad (x \in [a,b])$$

in $[a,b]$ stetig differenzierbar und

$$F'(x) = f(x) \qquad \forall x \in [a,b]$$



$(a=c)$

Wenn h sehr klein ist, dann ist  fast ein Rechteck mit Seitenlängen h und $f(x)$

$$\Longrightarrow \quad \frac{F(x+h)-F(x)}{h} \approx f(x)$$

Bew: Seien $x, x_0 \in [a,b]$. Aus Bemerkung 5.2.9 folgt

$$\underbrace{\int_c^x f(t)\,dt}_{F(x)} = \underbrace{\int_c^{x_0} f(t)\,dt}_{F(x_0)} + \int_{x_0}^x f(t)\,dt$$

Also: $F(x)-F(x_0) = \int_{x_0}^x f(t)\,dt$

Mittelwertsatz (Satz 5.3.4) $\Rightarrow$ es gibt ξ_x zwischen x_0 und x mit

$$\int_{x_0}^x f(t)\,dt = f(\xi_x)\cdot(x-x_0)$$

Für $x \neq x_0$ folgt: $\dfrac{\int_{x_0}^x f(t)\,dt}{\underbrace{x-x_0}_{}} = f(\xi_x)$

Da ξ zwischen x_0 und x liegt, geht ξ_x gegen x_0 wenn x gegen x_0 geht.

$$\Rightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{\overbrace{F(x)-F(x_0)}^{}}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} f(\xi_x) \overset{\text{Stetigkeit von } f \text{ in } x_0.}{=} f(x_0) \qquad \square$$

Def. 5.4.2: Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig. Eine Funktion $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ heisst <u>Stammfunktion</u> von f, falls F in $[a,b]$ (stetig) differenzierbar ist und $F'(x) = f(x) \quad \forall x\in[a,b]$

Satz 5.4.3: Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig. Dann gibt es eine Stammfunktion von f und diese ist bis auf additive Konstanten eindeutig bestimmt. Für jede Stammfunktion F gilt für alle $c,d\in[a,b]$:

"F in den Grenzen c bis d"

$$\int_c^d f(x)\,dx = F(x)\Big|_c^d := F(d) - F(c)$$

Bew: Existenz einer Stammfunktion haben wir im vorigen Satz bewiesen. Sind F_1, F_2 zwei Stammfunktionen von f, dann gilt

$$(F_1 - F_2)' = F_1' - F_2' = f - f = 0$$

Daraus folgt, dass $F_1 - F_2$ eine konstante Funktion ist.

also $\quad F_1(x) = F_2(x) + C \quad \forall x\in[a,b]$

für eine Konstante $C\in\mathbb{R}$.

Sei nun F eine beliebige Stammfunktion. Dann gilt, da

$x\mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ gemäss Satz 5.4.1 eine Stammfunktion ist:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt + C$$

für eine Konstante $C \in \mathbb{R}$. Dann gilt für $c, d \in [a,b]$:

$$F(d) - F(c) = \int_a^d f(t)\,dt + \cancel{C} - \left(\int_a^c f(t)\,dt + \cancel{C} \right)$$

$$= \int_c^d f(t)\,dt$$

$\square$

Clicker-Frage: Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und $G(x) := \int_0^{x^2} f(t)\,dt$

$G'(x) = ?$

Wenn $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, dann ist $F' = f$

also wäre $F'(x^2) = f(x^2)$. Aber: Dabei haben wir x^2 nur eingesetzt und noch nicht "mit abgeleitet".

Für die Berechnung von G' bemerken wir: $G(x) = F(x^2)$

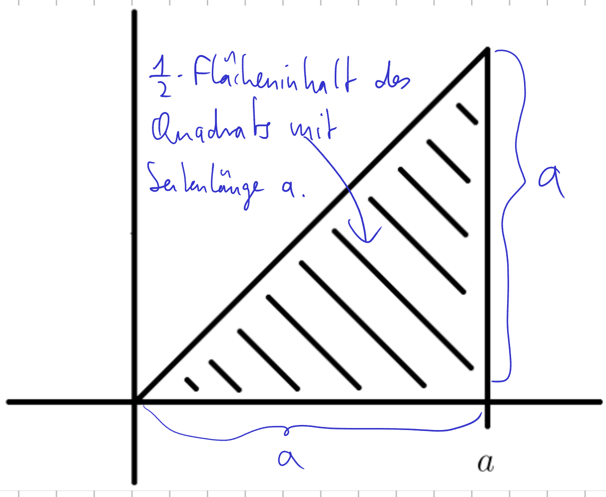
Kettenregel $\Rightarrow$ $G'(x) = \underbrace{F'}_{f}(x^2) \cdot 2x = 2x \cdot f(x^2)$

Der Fundamentalsatz führt die Berechnung von Integralen auf die Bestimmung einer Stammfunktion zurück.

Beispiel 5.4.4:

(1) $f(x) = x$ hat Stammfunktion $\frac{x^2}{2}$

$$\Rightarrow \int_0^a x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^a = \frac{a^2}{2} - 0 = \frac{a^2}{2}$$

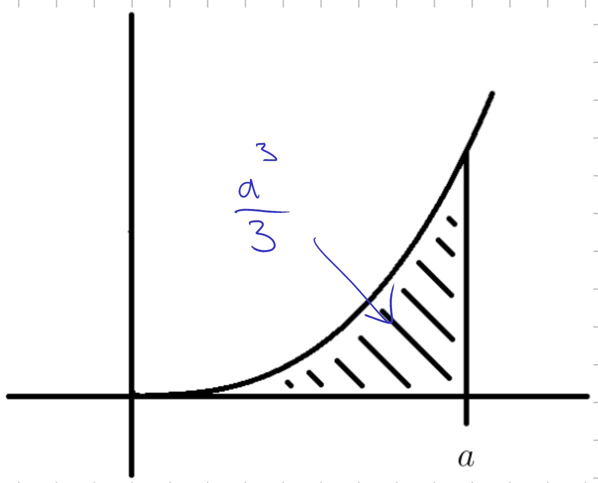


Allgemeiner $\int_a^b x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_a^b = \frac{b^2-a^2}{2}$

(vgl. Beispiel 5.1.5)

(2) $f(x) = x^2$ hat Stammfunktion $\frac{x^3}{3}$

$$\Rightarrow \int_0^a x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^a = \frac{a^3}{3}$$



Allgemeiner $\int_a^b x^2\,dx = \frac{b^3-a^3}{3}$

<u>Satz 5.4.5</u> (Partielle Integration) Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann gilt:

$$\int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx = f(x)\cdot g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)\,g(x)\,dx$$

$$= f(b)\,g(b) - f(a)\,g(a) - \int_a^b f'(x)\,g(x)\,dx$$

Bew: $H(x) = f(x)\, g(x)$ ist stetig differenzierbar mit

$$H'(x) = f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x) \qquad \text{(Produktregel)}$$

Also ist H Stammfunktion von $f' \cdot g + f \cdot g'$

Aus Satz 5.4.3 folgt:

$$\int_a^b \left(f'(x) g(x) + f(x) g'(x)\right) dx = H(b) - H(a) = f(b)\, g(b) - f(a)\, g(a)$$

Linearität $\Rightarrow \|$

$$\int_a^b f'(x) g(x)\, dx + \int_a^b f(x) \cdot g'(x)\, dx$$

$\square$

<u>Satz 5.4.6</u> (Substitution) Sei $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall mit $\phi([a,b]) \subset I$ und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig.

Dann gilt:

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)\, dx = \int_a^b f(\phi(t)) \cdot \phi'(t)\, dt$$

Bew: Sei F eine Stammfunktion von f auf einem kompakten Teilintervall $I' \subset I$ mit $\phi([a,b]) \subset I'$ (diese existiert aufgrund von Satz 5.5.1)

Die Ableitung von $F \circ \phi$ ist nach der Kettenregel:

$$(F \circ \phi)'(t) = F'(\phi(t)) \cdot \phi'(t) = f(\phi(t)) \cdot \phi'(t)$$

d.h. $F \circ \phi$ ist Stammfunktion von $(f \circ \phi) \cdot \phi'$

Aus Satz 5.4.3 folgt:

da $F \circ \phi$ Stammfunktion von $(f \circ \phi) \cdot \phi'$ ist

$$\int_a^b f(\phi(t))\, \phi'(t)\, dt = F(\phi(b)) - F(\phi(a))$$

$$= \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)\, dx$$

da F Stammfunktion von f ist

$\square$