Wiederholung:

Partielle Integration:

$$\int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx = f(x)\,g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)\,g(x)\,dx$$

Substitutionsregel:

$$\int_a^b f(\phi(x))\,\phi'(x)\,dx \overset{\text{"}t=\phi(x)\text{"}}{=} \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(t)\,dt$$

Clicker-Frage:

- $$\int_1^4 \frac{f(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}\,dx = \quad \begin{array}{l}\phi(x)=\sqrt{x}\\ \phi'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\end{array} \quad = \int_{\phi(1)}^{\phi(4)} f(t)\,dt$$

  $\phi(4) = \sqrt{4} = 2$, $\phi(1) = \sqrt{1} = 1$

- $$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} 2x\cdot f(x^2)\,dx = \quad \begin{array}{l}\phi(x)=x^2\\ \phi'(x)=2x\end{array} \quad = \frac{1}{2}\cdot\int_1^1 f(t)\,dt = 0$$

- $$\int_0^1 \underbrace{\frac{f(e^x)}{e^x}}_{g(e^x)}\cdot \overbrace{e^x}^{\phi'(x)}\,dx = \quad \begin{array}{l}\phi(x)=e^x\\ \phi'(x)=e^x\end{array} \quad = \int_1^e g(t)\,dt = \int_1^e \frac{f(t)}{t}\,dt$$

  $g(e^x)$, wobei $g(t) = \frac{f(t)}{t}$

$$-\int_1^2 \overbrace{\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x^2}}}^{g(\phi(x))}\cdot \overbrace{\left(-\frac{1}{x^2}\right)}^{\phi'(x)} dx = -\int_1^{\frac{1}{2}} \frac{f(t)}{t^2}\, dt = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{f(t)}{t^2}\, dt$$

$\phi(x) = \frac{1}{x}$

$\phi'(x) = -\frac{1}{x^2}$

$g(t) = \frac{f(t)}{t^2}$

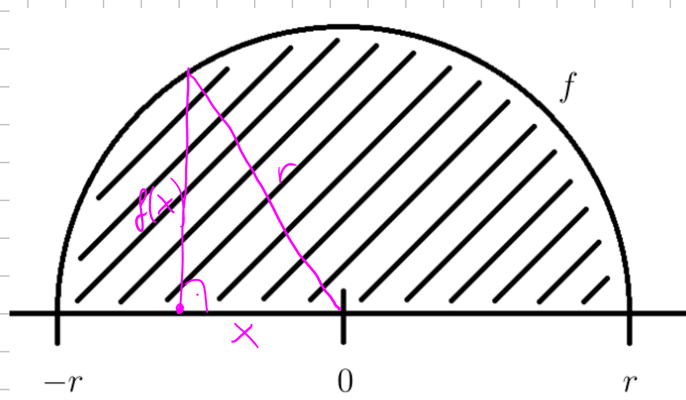
Heute:

- Flächeninhalt von Kreisscheiben
- unbestimmtes Integral
- Integration rationaler Funktionen (Partialbruchzerlegung)

Anwendung 5.4.7:

$x^2 + f(x)^2 = r^2$

Ein Halbkreis mit Radius $r > 0$ wird parametrisiert durch:



$$f: [-r, r] \to \mathbb{R},\quad x \mapsto \sqrt{r^2 - x^2}$$

Die Fläche zwischen der x-Achse und dem Halbkreis ist

$$\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx$$

Zur Berechnung verwenden wir die Substitutionsregel mit

läuft von $-r$ bis r, wenn t von $-\frac{\pi}{2}$ bis $\frac{\pi}{2}$ läuft.

$$\phi : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-r, r], \quad t \mapsto r \cdot \sin(t)$$

$$\Rightarrow \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = \int_{\phi(-\frac{\pi}{2})}^{\phi(\frac{\pi}{2})} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\sqrt{r^2 - r^2 \sin(t)^2}}_{r\sqrt{1-\sin(t)^2} = r\sqrt{\cos(t)^2} = r\cos(t) \ldots \text{da } \cos(t) \geq 0 \ \forall t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} \cdot r \cdot \cos(t)\, dt$$

$$= r^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)^2\, dt.$$

Nun verwenden wir partielle Integration:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) \cdot \underbrace{\cos(t)}_{\sin'(t)}\, dt = \underbrace{\cos(t)\sin(t)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\sin(t)^2}_{1-\cos(t)^2}\, dt$$

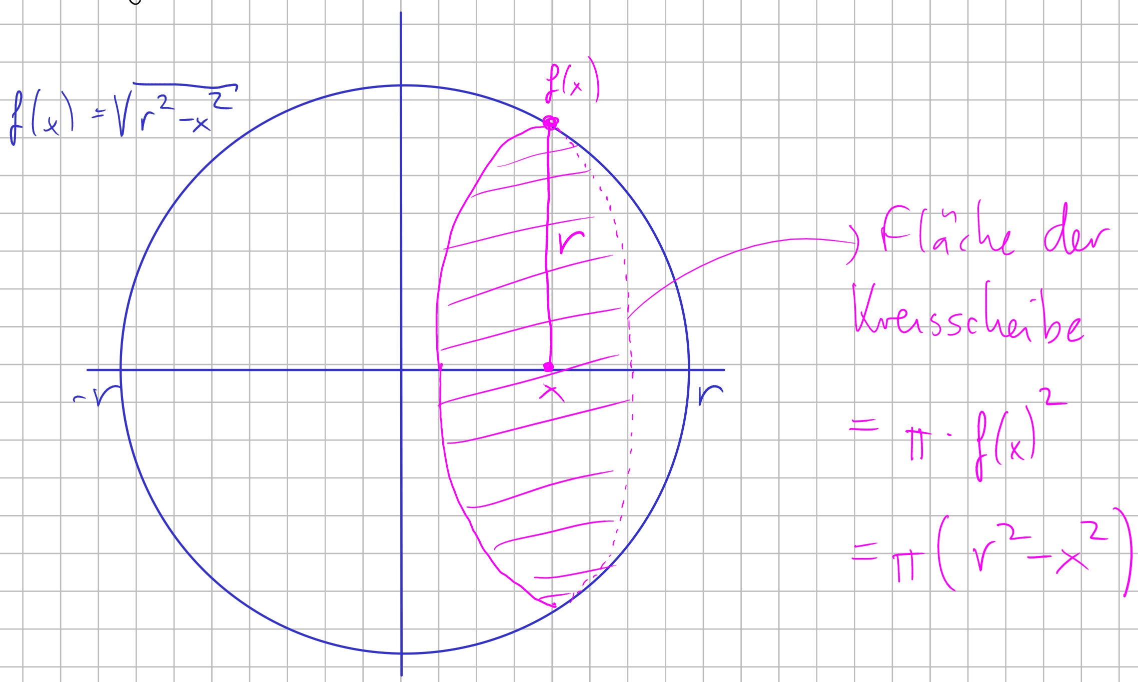
$$= \pi - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)^2\, dt$$

$$\Rightarrow \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)^2\, dt = \frac{\pi}{2}$$

$\Rightarrow$ Halbe Kreisfläche $= \frac{\pi}{2} \cdot r^2$

$\Rightarrow$ Ganze Kreisfläche $= \pi r^2$

Frage: Können wir durch Integration auch das Volumen von Kugeln berechnen?



Volumen einer Kugel mit Radius r =

$$= \int_{-r}^{r} \pi(r^2-x^2)\,dx = \underbrace{\int_{-r}^{r} \pi r^2\,dx}_{2\pi r^3} - \pi \underbrace{\int_{-r}^{r} x^2\,dx}_{\frac{x^3}{3}\Big|_{-r}^{r} = \frac{r^3}{3} - \frac{-r^3}{3} = \frac{2r^3}{3}}$$

$$= 2\pi r^3 - \frac{2\pi r^3}{3} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

5.9 Das unbestimmte Integral

Sei I ein Intervall und $f: I \to \mathbb{R}$ stetig.

Fundamentalsatz $\Rightarrow$ es gibt eine Stammfunktion F von f. (zB: $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ für ein $a \in I$)

Wir schreiben: $F(x) = \int f(x)\,dx + C$

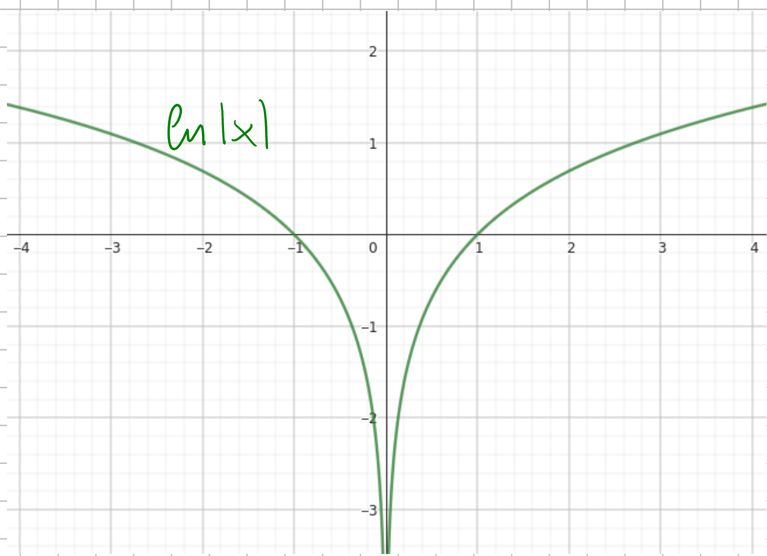
Die Integrationskonstante C deutet an, dass sich je zwei Stammfunktionen um eine Konstante unterscheiden.

"Integration ist die Umkehroperation der Ableitung"

Viele Ableitungen sind uns schon bekannt, was die folgenden Stammfunktionen ergibt:

- für $s \in \mathbb{R}$:

$$\int x^s\,dx = \begin{cases} \frac{1}{s+1} \cdot x^{s+1} + C & \text{falls } s \neq -1 \\ \ln|x| + C & \text{falls } s = -1 \end{cases}$$



- $\int e^x\,dx = e^x + C$

$\int \cos(x)\,dx = \sin(x) + C$

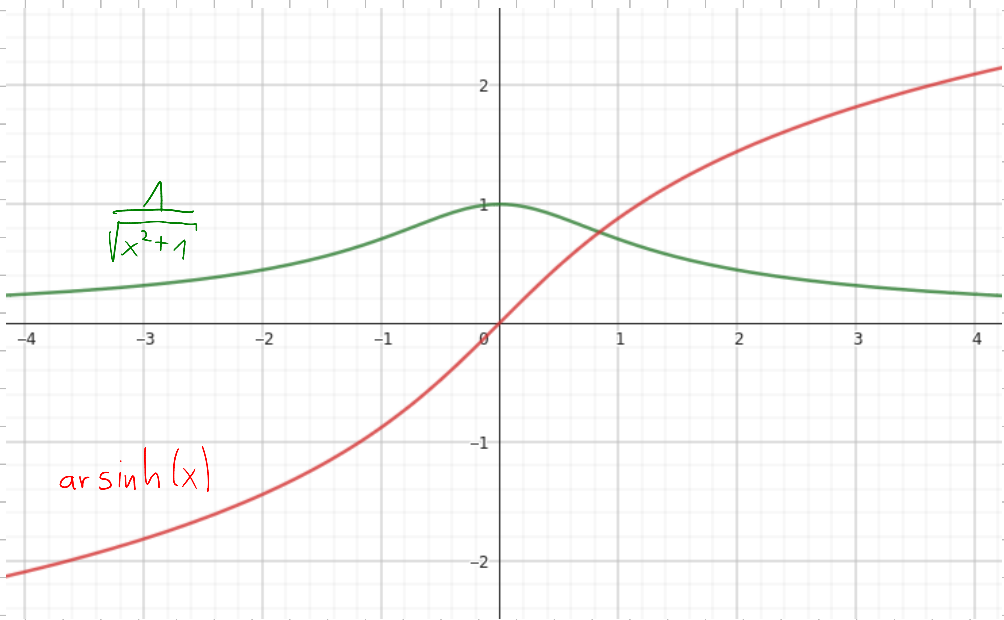
$\int \sin(x)\,dx = -\cos(x) + C$

- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin(x) + C$, $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan(x) + C$

für $x \in (-1, 1)$

- $\displaystyle\int \underbrace{\sinh(x)}_{\frac{e^x-e^{-x}}{2}}\,dx = \cosh(x)+C, \qquad \int \underbrace{\cosh(x)}_{\frac{e^x+e^{-x}}{2}}\,dx = \sinh(x)+C$

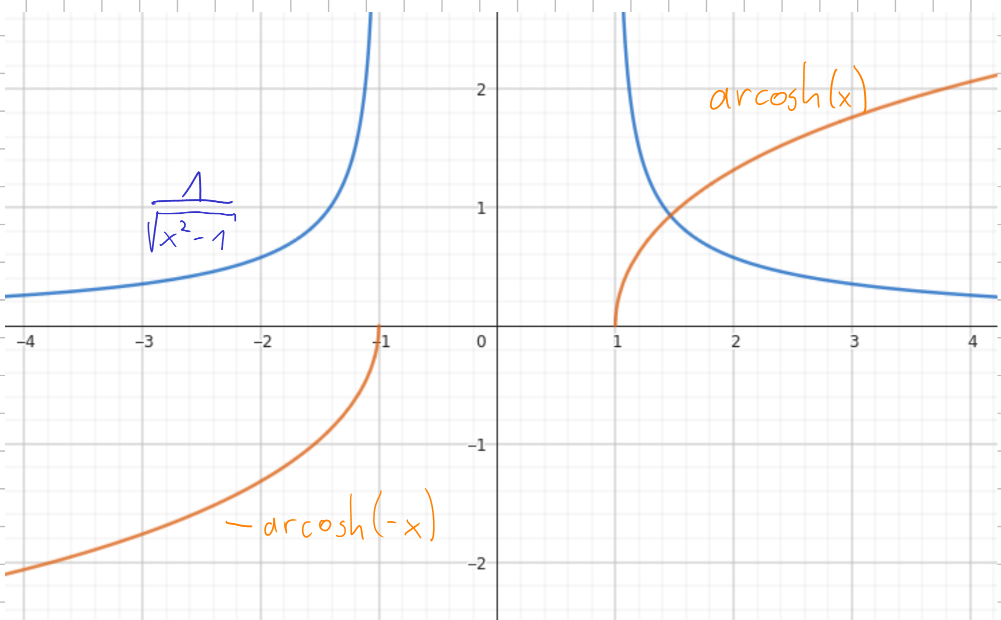
- $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \operatorname{arsinh}(x)+C$



$\operatorname{arsinh}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
=
Umkehrfkt. von
$\sinh: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\operatorname{arcosh}: [1,\infty) \to [0,\infty)$
=
Umkehrfkt. von
$\cosh: [0,\infty) \to [1,\infty)$
(vgl. Beispiel 4.2.7 oder Serie 9)

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \begin{cases} \operatorname{arcosh}(x)+C & \text{für } x>1 \\ -\operatorname{arcosh}(-x)+C & \text{für } x<-1 \end{cases}$$



Partielle Integration:

$$\int f \cdot g' \, dx = f \cdot g - \int f' \cdot g \, dx$$

Beispiel 5.9.1:

(1) $\int \underbrace{\ln(x)}_{f(x)} \cdot \underbrace{1}_{g'(x)} dx = \ln(x)\, x - \int \underbrace{\frac{1}{x} \cdot x}_{1} \, dx = x \ln(x) - x + C$

(2) $\int \underbrace{x}_{g'(x)} \underbrace{\ln(x)}_{f(x)} \, dx = \frac{x^2}{2} \ln(x) - \int \underbrace{\frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x}}_{= \frac{x}{2}} \, dx = \frac{x^2}{2} \ln(x) - \frac{x^2}{4} + C$

(3) $\int \underbrace{x}_{f(x)} \underbrace{\sin(x)}_{g'(x)} \, dx = -x\cos(x) + \int \cos(x) \, dx = -x\cos(x) + \sin(x) + C$

(4) übersprungen, siehe Skript

(5) Für $J_n = \int \frac{1}{(1+x^2)^n} dx$, $n \geq 1$, kann mit partieller Integration eine Rekursionsformel hergeleitet werden.

$n=2$: $\underbrace{\int \underbrace{1}_{g'(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{1+x^2}}_{f(x)} dx}_{J_1} = \frac{x}{1+x^2} + \underbrace{\int \frac{2x^2 + 2 - 2}{(1+x^2)^2} dx}$

$$\underbrace{\int \frac{2\cancel{(x^2+1)}}{(1+x^2)^{\cancel{2}}} dx}_{2 \cdot J_1} - \underbrace{\int \frac{2}{(1+x^2)^2} dx}_{2 \cdot J_2}$$

$$\Rightarrow \quad J_1 = \frac{x}{1+x^2} + 2J_1 - 2J_2$$

$$J_2 = \Rightarrow \int \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx = \frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\cdot \overbrace{J_1}^{\arctan(x)} = \frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\arctan(x)$$

Substitution: Um $\int f(x)\,dx$ zu berechnen, ersetzen wir

$x = \phi(u)$

$dx = \phi'(u)\cdot du$

Am Ende müssen wir u wieder durch x ersetzen.

Bsp (vgl. Clicker):

- $e^x = u$
  $x = \ln(u)$
  $dx = \frac{1}{u}du$
- $\frac{1}{x} = u$
  $x = \frac{1}{u}$
  $dx = -\frac{1}{u^2}du$

Beispiel 5.9.2:

(1) $$\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx \overset{\substack{x=a\cdot u\\ dx=a\cdot du}}{=} \int \frac{1}{a^2+a^2u^2}\cdot a\,du = \frac{1}{a}\cdot\int\frac{1}{1+u^2}\,du$$

$$= \frac{1}{a}\arctan(u) + C = \frac{1}{a}\cdot\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

(2)-(4) übersprungen, siehe Skript

Partialbruchzerlegung:

Zur Berechnung von Stammfunktionen rationaler Funktionen, also Funktionen der Form $\frac{P(x)}{Q(x)}$, wobei P, Q reelle

Polynome sind mit $\deg(P) < \deg(Q)$ und Q <u>normiert</u> ist, d.h. $Q(x) = x^4 + \ldots$

Koeffizient 1 vor höchster Potenz von x

<u>Merke</u>: Den Fall $\deg(P) \geq \deg(Q)$ können wir mit Polynomdivision auf den obigen zurückführen.

<u>Bsp</u>: $P(x) = x^4 + 1$,

$Q(x) = x^2 + x$

<u>Schema zur Polynomdivision</u>:

$$
\begin{aligned}
&(x^4+1) : (x^2+x) = x^2 - x + 1 \\
&\underline{-(x^4+x^3)} \\
&\quad -x^3+1 \\
&\quad \underline{-(-x^3-x^2)} \\
&\qquad x^2+1 \\
&\qquad \underline{-(x^2+x)} \\
&\qquad 1-x
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow \frac{P(x)}{Q(x)} = x^2 - x + 1 + \frac{1-x}{Q(x)}$$

Fall "alle Nullstellen von Q sind reell"

Also $Q(x) = \prod_{i=1}^{k} (x - \gamma_i)^{n_i}$

n_i: Vielfachheiten der Nullstellen von Q

γ_i: Nullstellen von Q

Dann machen wir den Ansatz:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} \frac{C_{ij}}{(x-\gamma_i)^j}$$

Die Koeffizienten C_{ij} bestimmen wir, indem wir mit $Q(x)$ multiplizieren, und dann einen Koeffizientenvergleich durchführen.

Die rechte Seite oben lässt sich dann einfach integrieren:

$$\int \frac{1}{x-y_i}\,dx = \ln|x-y_i|, \quad \int \frac{1}{(x-y_i)^j}\,dx = \frac{-1}{j-1}\,\frac{1}{(x-y_i)^{j-1}} \quad \text{für } j \geq 2$$

<u>Bsp:</u> $$\int \frac{1-x}{\underbrace{x^2+x}_{x(x+1)}}\,dx = ?$$

Ansatz: $$\frac{1-x}{x^2+x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1}$$

Mit Nenner multiplizieren: $1-x = A(x+1) + Bx = (A+B)x + A$

Koeffizientenvergleich: $A = 1$, $A+B = -1 \Rightarrow B = -2$

$$\Rightarrow \int \frac{1-x}{x^2+x}\,dx = \ln|x| - 2\ln|x+1|$$

<u>Bemerkung:</u> Im Allgemeinen muss man beim Koeffizientenvergleich ein Lineares Gleichungssystem lösen, um die Koeffizienten zu bestimmen. Dazu kann das Gauss-Verfahren aus der Linearen Algebra verwendet werden.