Wiederholung:

- **Partialbruchzerlegung**: Zerlegung von rationalen Funktionen $\frac{P(x)}{Q(x)}$ in eine einfachere Form, die sich insbesondere leicht integrieren lässt

  P, Q sind hierbei Polynome mit $\deg(P) < \deg(Q)$ und wir nehmen an, dass Q normiert ist.

- Fall "alle Nullstellen von Q sind reell"

Also $Q(x) = \prod_{i=1}^{k} (x - \gamma_i)^{n_i}$

← Vielfachheiten der Nullstellen von Q

Nullstellen von Q

Ansatz:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} \frac{c_{ij}}{(x-\gamma_i)^j}$$

← j läuft von 1 bis zur Vielfachheit n_i der Nullstelle γ_i

Clicker-Frage:

$$\int \frac{1}{x^2(x+1)}\,dx = ?$$

$Q(x) = x^2(x+1)$

Ansatz: $\frac{1}{x^2(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1}$

Mit Nenner multiplizieren: $0x^2 + 0x + 1 = Ax(x+1) + B(x+1) + Cx^2$

$$= (A+C)x^2 + (A+B)x + B$$

Koeffizientenvergleich: $B = 1$, $A + B = 0 = A + C$

$$\Rightarrow A = -1,\ C = 1$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{x^2(x+1)}\,dx = \int \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x+1}\right) dx$$

$$= -\ln|x| - \frac{1}{x} + \ln|x+1| + C$$

Fall "Q hat auch nicht-reelle Nullstellen"

reelles Polynom

Alle echt komplexen Nullstellen von Q treten in Paaren zusammen mit ihren komplex Konjugierten auf.

Nun ist: $(x - (\alpha + i\beta))(x - (\alpha - i\beta)) = (x-\alpha)^2 + \beta^2$

Daher hat Q im Allgemeinen die Form:

$$Q(x) = \underbrace{\prod_{i=1}^{\ell} \left((x-\alpha_i)^2 + \beta_i^2\right)^{m_i}}_{\text{komplexe Nullstellen}} \cdot \underbrace{\prod_{i=1}^{k} (x - \gamma_i)^{n_i}}_{\text{reelle Nullstellen}}$$

Wir müssen nun den folgenden allgemeineren Ansatz machen:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{A_{ij} + B_{ij}x}{\left((x-\alpha_i)^2 + \beta_i^2\right)^j} + \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} \frac{C_{ij}}{(x-\gamma_i)^j}$$

Die Koeffizienten bestimmt man wieder durch Multiplikation mit dem Nenner und Koeffizientenvergleich.

9

Wie integriert man $\frac{A+Bx}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^j}$?

Schreibe $\frac{A+Bx}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^j} = \underset{(1)}{\frac{B(x-\alpha)}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^j}} + \underset{(2)}{\frac{A+B\alpha}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^j}}$

(1): Substituiere $u=(x-\alpha)^2+\beta^2 \Rightarrow du = 2(x-\alpha)\,dx$

(2): Substituiere $x-\alpha = \beta\cdot u \Rightarrow dx = \beta\cdot du$

$$\Rightarrow \int \frac{A+B\alpha}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^j}\,dx = \int \frac{A+B\alpha}{\beta^{2j}(u^2+1)^j}\cdot\beta\,du = \frac{A+B\alpha}{\beta^{2j-1}}\cdot\int\frac{1}{(u^2+1)^j}\,du$$

und letzteres ist das Integral J_n aus Beispiel 5.9.1 (5).

<u>Beispiel:</u> $\int \frac{1-x}{x^3+x}\,dx = ?$

$Q(x) = x(x^2+1)$

Ansatz: $\frac{1-x}{x^3+x} = \frac{A+Bx}{x^2+1} + \frac{C}{x}$

Mit Nenner multiplizieren: $1-x = x\cdot(A+Bx) + C\cdot(x^2+1)$

$= (B+C)x^2 + Ax + C$

Koeffizientenvergleich: $C=1,\ A=-1,\ B=-1$

$$\Longrightarrow \int \frac{1-x}{x^3+x}\,dx = \int \left(\frac{-1}{x^2+1} - \overbrace{\frac{x}{x^2+1}}^{u=x^2+1} + \frac{1}{x} \right) dx$$

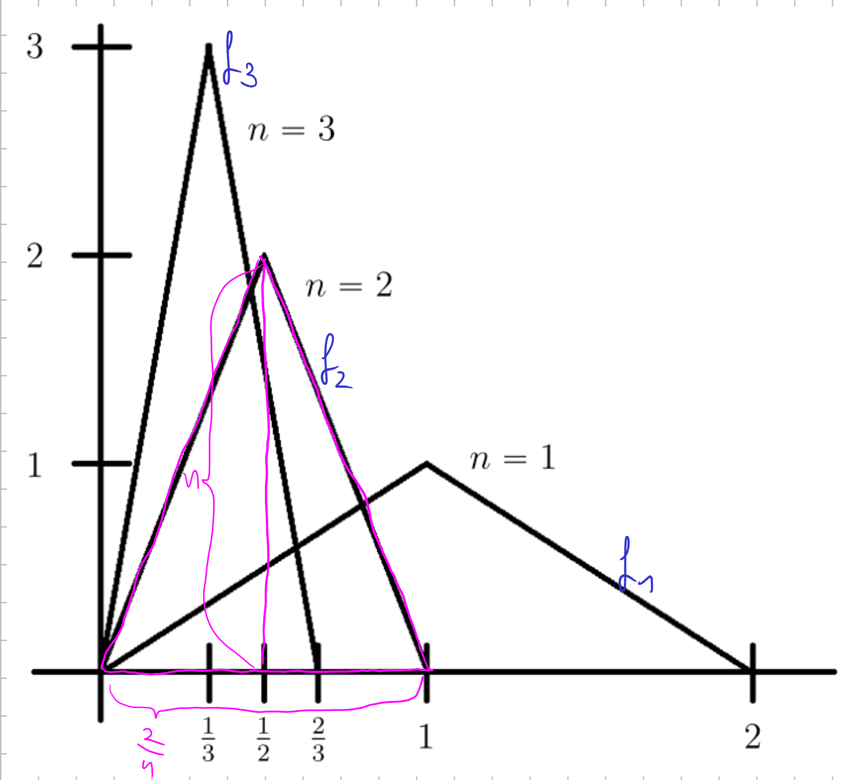
$$= -\arctan(x) - \frac{1}{2}\cdot \ln(x^2+1) + \ln|x| + C$$

5.5 Integration konvergenter Reihen

Frage: "Darf man lim und $\int$ vertauschen?"

Beispiel: $f_n : [0,2] \to \mathbb{R}$

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & 0 \le x \le \frac{1}{n} \\ 2n - n^2 x & \frac{1}{n} \le x \le \frac{2}{n} \\ 0 & \frac{2}{n} \le x \le 2 \end{cases}$$



Dann gilt:

(1) $f_n(x) \longrightarrow 0$ für $n \to \infty$ $\forall x \in [0,2]$

(2) $\int_0^2 f_n(x)\,dx = 1 \overset{\frac{n \cdot \frac{2}{n}}{2}}{=}$ $\forall n \geq 1$, da f_n ein gleichschenkeliges Dreieck beschreibt mit Länge $\frac{2}{n}$ der Basisseite und Höhe n.

Aber: $\displaystyle\int_0^2 \overbrace{\lim_{n\to\infty} f_n(x)}^{=0}\,dx = 0$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \int_0^2 f_n(x)\,dx = 1 \neq 0 = \int_0^2 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx$$

Wenn $(f_n)_{n\geq 1}$ gleichmässig gegen f konvergiert, tritt dieses Problem nicht auf:

__Satz 5.5.1:__ Seien $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkte, integrierbare Funktionen, so dass $(f_n)_{n\geq 1}$ gleichmässig gegen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ konvergiert. Dann ist f beschränkt und integrierbar und

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

Anders ausgedrückt: $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx$

"Man darf $\lim$ und $\int$ vertauschen."

__Bew.:__ siehe Skript. $\square$

Anwendung auf die Integration von Potenzreihen:

__Korollar 5.5.3:__ Sei $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ eine konvergente Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius $\rho > 0$. Dann gilt für $x \in (-\rho, \rho)$:

$$\int_0^x f(t)\,dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k+1} x^{k+1}$$

Beispiel 5.5.4: (Der Wert der alternierenden harmonischen Reihe)

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - + \ldots \quad \text{mit Konvergenzradius } 1$$

Integriere von 0 bis x: $\quad (0 \leq x < 1)$

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t}\, dt = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - + \ldots$$

Also:

$$\ln(1+x) - \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} = \frac{x^{2n+1}}{2n+1} - \frac{x^{2n+2}}{2n+2} + - \ldots$$

Ungleichung im Leibniz kriterium monoton fallend für $0 \leq x \leq 1$

$$\Rightarrow \frac{x^{2n+1}}{2n+1} - \frac{x^{2n+2}}{2n+2} \leq \ln(1+x) - \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} \leq \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$\forall x \in [0,1) \quad \forall n \geq 1$

Grenzübergang $x \to 1^-$

$$\Rightarrow \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \leq \ln(2) - \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k-1} \cdot \frac{1}{k} \leq \frac{1}{2n+1}$$

Grenzübergang $n \to \infty$

$$\Rightarrow \ln(2) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \cdot \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - + \ldots$$

Beispiel 5.5.5:

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - + \dots \qquad \text{für } |x| < 1$$

Integriere von 0 bis x: $\quad (0 \leq x < 1)$

$$\arctan(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\, dt = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - + \dots$$

Mit ähnlicher Argumentation wie im vorigen Beispiel:

$$\frac{\pi}{4} = \arctan(1) = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - + \dots$$

Clicker-Frage: Seien $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt, integrierbar und $f_n \to f$ punktweise für $n \to \infty$, wobei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt.

- Ist f dann integrierbar?

Nein! Sei $(q_n)_{n \geq 1}$ eine Abzählung von $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ und

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in \{q_1, \dots, q_n\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Diese f_n konvergieren punktweise in $[0,1]$ gegen

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \cap [0,1] \end{cases}$$

... nicht integrierbar! ↯ (vgl. Bsp. 5.1.6)

- Wenn f integrierbar ist, gilt dann $\lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx$?

Nein, siehe Bsp. am Anfang von §5.5

- Wenn f integrierbar ist und $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$, gilt dann $f_n \to f$ gleichmässig?

Nein! $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$, konvergiert punktweise aber nicht gleichmässig gegen $f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$ und die obige Gleichheit gilt ↯

- Wenn $f_n \to f$ gleichmässig, dann ist f integrierbar und $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$.

Ja, siehe Satz 5.5.1.

5.8 Uneigentliche Integrale

Ziel: Erweiterung des Integrals auf unbeschränkte Bereiche oder unbeschränkte Funktionen.

Beispiel: Wie könnten wir $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ verstehen?

Intuitiv: Eine Stammfkt. von $\frac{1}{x^2}$ ist $-\frac{1}{x}$. Also vielleicht

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \text{"}\underbrace{-\frac{1}{\infty}}_{=0} - (-1)\text{"} = 1 \; ?$$

Def. 5.8.1 + 5.8.8: Sei $J \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f: J \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die auf jedem kompakten Teilintervall $[a,b] \subset J$ beschränkt und integrierbar ist.

zB: f stetig

Sei $A = \inf(J)$ und $B = \sup(J)$

- Fall "J ist nach rechts offen oder unbeschränkt":

d.h. $A \in J$, $B \notin J$. z.B. $J = [1, \infty)$, $J = [0,1)$

f ist auf J (uneigentlich) integrierbar falls der Grenzwert

$$\underbrace{\lim_{b \to B^-} \int_A^b f(x)\,dx}_{\text{bekannt}} =: \underbrace{\int_A^B f(x)\,dx}_{\text{neu!}}$$

in $\mathbb{R}$ existiert

- Fall "J ist nach links offen oder unbeschränkt":

d.h. $A \notin J$, $B \in J$. z.B. $J = (-\infty, 0]$, $J = (0,1]$

f ist auf J (uneigentlich) integrierbar falls der Grenzwert

$$\underbrace{\lim_{a \to A^+} \int_a^B f(x)\,dx}_{\text{bekannt}} =: \underbrace{\int_A^B f(x)\,dx}_{\text{neu!}}$$

in $\mathbb{R}$ existiert

- Fall "J ist nach links und rechts offen oder unbeschränkt":

d.h. $A \notin J$, $B \notin J$ z.B. $J = (-\infty, \infty) = \mathbb{R}$, $J = (0,1)$

f ist auf J (uneigentlich) integrierbar falls für ein $c \in J$

die uneigentlichen Integrale $\int_c^B f(x)dx$ und $\int_A^c f(x)\,dx$ in $\mathbb{R}$

existieren. In diesem Fall definieren wir

$$\int_A^B f(x)\,dx := \underbrace{\int_C^B f(x)\,dx + \int_A^C f(x)\,dx}_{\text{uneigentliche Integrale}}.$$

Der Wert des uneigentlichen Integrals ist dann unabhängig von der Wahl von $c \in J$.

- Wenn das uneigentliche Integral $\int_A^B f(x)\,dx$ in $\mathbb{R}$ existiert, sagen wir, das uneigentliche Integral <u>konvergiert</u>.

Andernfalls sagen wir, das uneigentliche Integral <u>divergiert</u>.

<u>Beispiel 5.8.2:</u>

(1) $$\int_{A=0}^{B=\infty} e^{-x}\,dx \overset{\text{Definition}}{=} \lim_{b\to\infty} \underbrace{\int_0^b e^{-x}\,dx}_{1-e^{-b}} = \lim_{b\to\infty} (1-\overset{\to 0}{e^{-b}}) = 1$$

(2) Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Für $b > 1$ gilt

$$\int_1^b \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases} \ln(b), & \alpha = 1 \quad \text{... divergiert für } b\to\infty \\ \frac{b^{1-\alpha}-1}{1-\alpha}, & \alpha \neq 1 \quad \begin{array}{l} \text{konvergiert gegen } \frac{1}{\alpha-1} \text{ falls } \alpha > 1 \\ \text{divergiert falls } \alpha < 1 \end{array} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \frac{1}{\alpha-1} \qquad \text{falls } \alpha > 1$$

und das Integral existiert nicht / divergiert falls $\alpha \leq 1$

Beispiel 5.8.9: Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Für $\varepsilon \in (0,1)$ gilt:

$$\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases} -\ln(\varepsilon), & \alpha = 1 \\ \frac{1-\varepsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha}, & \alpha \neq 1 \end{cases}$$

divergiert für $\varepsilon \to 0^+$

konvergiert gegen $\frac{1}{1-\alpha}$ falls $\alpha < 1$

divergiert falls $\alpha > 1$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \frac{1}{1-\alpha} \quad \text{falls } \alpha < 1$$

und das Integral existiert nicht / divergiert falls $\alpha \geq 1$