Clicker-Frage: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = ?$

Eine Stammfunktion von $\frac{1}{1+x^2}$ ist $\arctan(x)$.

- $$\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^{b} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} \arctan(b) = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{a\to-\infty} -\arctan(a) = \frac{\pi}{2}$$

- $$\int_c^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2} - \cancel{\arctan(c)}$$

$$\int_{-\infty}^{c} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \cancel{\arctan(c)} + \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\int_{-\infty}^{c} \frac{1}{1+x^2}\,dx + \int_c^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx}_{\text{unsere Def. für beidseitig offene / unbeschränkte uneigentliche Integrale.}} = \pi \qquad \forall c\in\mathbb{R}.$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \pi$$

Satz 5.8.5: Sei $f:[1,\infty) \to [0,\infty)$ monoton fallend.

Dann konvergiert die Reihe

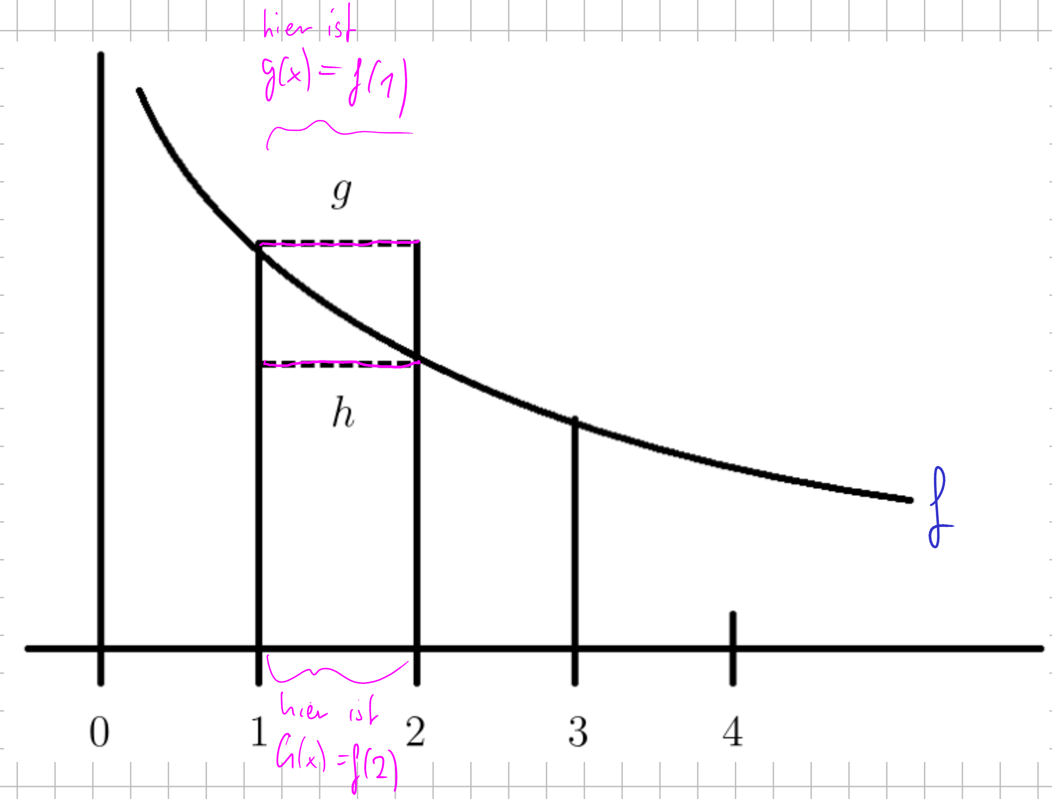
$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

genau dann wenn das uneigentliche Integral

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx$$

konvergiert.

Bew: Sei $g(x) = f(\lfloor x \rfloor)$, $h(x) = f(\lfloor x \rfloor + 1)$



f monoton fallend $\Longrightarrow$ $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ $\quad \forall x \in [1,\infty)$

Monotonie des Integrals impliziert für $N \geq 2$:

$$\sum_{n=2}^{N} f(n) = \int_1^N h(x)\,dx \leq \int_1^N f(x)\,dx \leq \int_1^N g(x)\,dx \leq \sum_{n=1}^{N-1} f(n)$$

Wenn $\sum_{n \geq 1} f(n)$ konvergiert, dann ist also

$$b \mapsto \int_1^b f(x)\,dx$$

monoton wachsend und beschränkt $\Rightarrow \int_1^\infty f(x)\,dx$ konvergiert

da $f \geq 0$

Wenn $\int_1^\infty f(x)\,dx$ konvergiert, dann sind die Partialsummen

da $f \geq 0$

von $\sum_{n \geq 1} f(n)$ beschränkt $\Rightarrow$ die Reihe $\sum_{n \geq 1} f(n)$ konvergiert

$\square$

<u>Beispiel 5.8.6:</u> Sei $\alpha > 0$. Wann konvergiert die Reihe

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha} \quad ?$$

Für das zugehörige Integral $\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ haben wir diese Frage schon beantworten können:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx \quad \text{konvergiert} \Leftrightarrow \alpha > 1$$

(Beispiel 5.8.2 (2))

$\Rightarrow$ die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ konvergiert genau dann wenn $\alpha > 1$.

Beispiel 5.8.7: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln(n)^\beta}$ konvergiert $\Leftrightarrow \beta > 1$.

(siehe Skript für Details)

Zum Abschluss: Stirling'sche Formel

Def: Zwei Folgen $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n \geq 1}$ positiver reeller Zahlen heissen asymptotisch äquivalent, falls

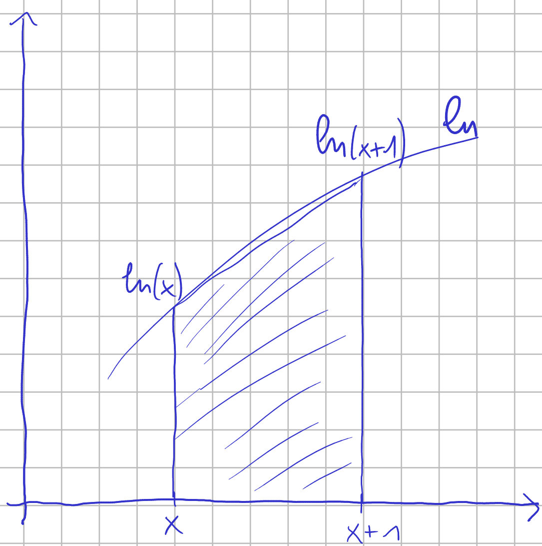
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1.$$

Notation: $a_n \sim b_n \quad (n \to \infty)$

Satz: (Stirling-Formel, asymptotische Version)

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n = n! \sim \sqrt{2\pi n} \cdot n^n \cdot e^{-n} \qquad (n \to \infty)$$

Bew: Wir betrachten $\ln : [1, \infty) \to [0, \infty)$.



Fläche des Trapezes unter dem Graphen von ln

$$= \frac{1}{2} \cdot (\ln(x) + \ln(x+1))$$

Summieren wir die Trapeze unter ln von 1 bis n, so erhalten wir die Fläche:

2x 2x 1x

$$\frac{1}{2}\Big(\overset{=0}{\cancel{\ln(1)}}+\ln(2)+\ln(2)+\ln(3)+\ln(3)+\ln(4)+\dots+\ln(n-1)+\ln(n)\Big)$$

$$=\ln(1)+\dots+\ln(n)-\frac{1}{2}\cdot\ln(n)=\ln(n!)-\frac{1}{2}\ln(n)$$

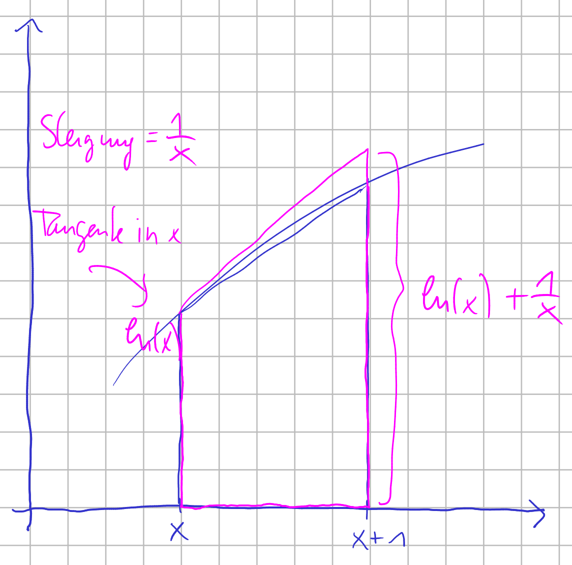
Daher ist
$$c_n=\int_1^n \ln(x)\,dx-\ln(n!)+\frac{1}{2}\ln(n)$$

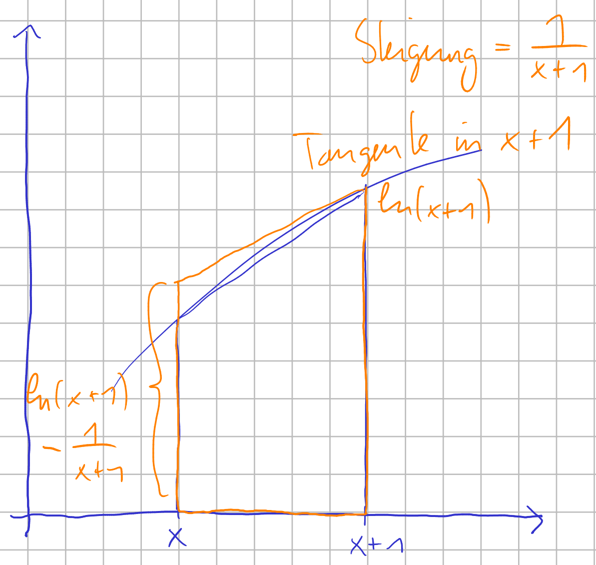
$$=\overbrace{n\cdot\ln(n)-n-(1\cdot\cancel{\ln(1)}-1)}-\ln(n!)+\frac{1}{2}\ln(n)$$

$$=\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln(n)-n+1-\ln(n!)$$

da c_n die Fläche zwischen $\ln(x)$ und den Trapezen darunter von 1 bis n ist, ist $(c_n)_{n\geq 1}$ nicht-negativ und mon. steigend.

Nun betrachten wir Tangenten an $\ln(x)$:





Fläche $\square$ $=\frac{1}{2}\cdot\left(\ln(x)+\ln(x)+\frac{1}{x}\right)$

$$=\ln(x)+\frac{1}{2x}$$

Fläche $\square$ $=\frac{1}{2}\left(\ln(x+1)+\ln(x+1)-\frac{1}{x+1}\right)$

$$=\ln(x+1)-\frac{1}{2(x+1)}$$

$\Rightarrow$ die Fläche unter ln von x bis x+1 ist höchstens:

$$\frac{1}{2}\left(\ln(x)+\ln(x+1)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)\right)$$

Integrieren von 1 bis n:

$$\int_1^n \ln(x)\,dx \leq \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2}\left(\ln(k)+\ln(k+1)\right)} + \frac{1}{4}\cdot \overbrace{\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)}^{1-\cancel{\frac{1}{2}}+\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}+\cancel{\frac{1}{3}}-\dots-\frac{1}{n}}$$

$$= \ln(n!) - \frac{1}{2}\ln(n) + \frac{1}{4} - \frac{1}{4n}$$

$$\Rightarrow c_n = \int_1^n \ln(x)\,dx - \ln(n!) + \frac{1}{2}\ln(n) \leq \frac{1}{4} - \frac{1}{4n} < \frac{1}{4} \quad \forall n \geq 1.$$

$(c_n)_{n\geq 1}$ ist also monoton steigend und beschränkt

$\Rightarrow$ c_n konvergiert, sei $c := \lim_{n\to\infty} c_n$

Nehmen wir exp:

$$\exp(c_n) = \exp\left((n+\tfrac{1}{2})\ln(n) - n + 1 - \ln(n!)\right)$$

Stetigkeit von exp.

$$= \frac{n^n \cdot \sqrt{n} \cdot e^{-n} \cdot e}{n!} \longrightarrow e^c \qquad (n\to\infty)$$

$$\Rightarrow n! \sim \overbrace{e^{1-c}}^{a} \sqrt{n}\cdot n^n e^{-n} \qquad (n\to\infty)$$

Um a zu bestimmen, nutzen wir das

Wallissche Produkt: (Beweis in der letzten Übungsserie)

$$\boxed{\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)}}$$

$$\overbrace{\prod_{k=1}^{n} \frac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)}}^{\to \frac{\pi}{2}\,!} = \prod_{k=1}^{n} \frac{(2k)^4}{(2k-1)2k\cdot 2k\cdot(2k+1)} = \frac{2^{4n}\cdot(n!)^4}{((2n)!)^2\cdot(2n+1)}$$

$\lim n\to\infty$

$$\sim \frac{\cancel{2^{4n}}\cdot a^{\cancel{4}^{2}}\cdot n^{\cancel{2}}\cdot \cancel{n^{4n}}\, \cancel{e^{-4n}}}{\cancel{a^2}\cdot 2\cancel{n}\cdot \cancel{(2n)^{4n}}\,\cancel{e^{-4n}}\cdot(2n+1)} = \frac{a^2}{2}\cdot\frac{n}{2n+1} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{a^2}{4}$$

$$\Longrightarrow \frac{a^2}{4} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow a = \sqrt{2\pi}$$

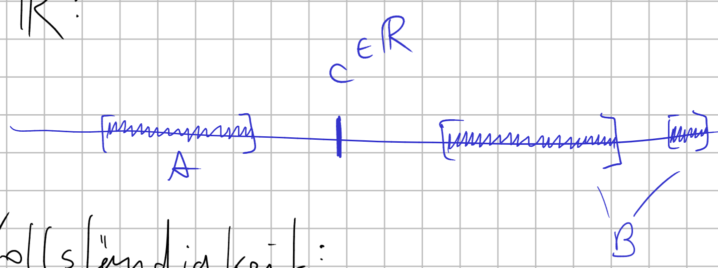
Oben einsetzen $\Rightarrow$ $n! \sim \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n} \quad (n\to\infty)$

$\square$

Zusammenfassung

Kapitel 1: Reelle Zahlen, Euklidische Räume, Komplexe Zahlen

- Reelle Zahlen, Körperaxiome
- Unterschied zwischen $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$:
  $\mathbb{R}$ ist ordnungsvollständig



- Erste Folgerungen aus der Vollständigkeit:
  - Existenz von Quadratwurzeln
  - Supremum und Infimum
- $\mathbb{R}^n$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum
- Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$, Kreuzprodukt auf $\mathbb{R}^3$
- Komplexe Zahlen, Polarform
- Kreisteilungsgleichung, Fundamentalsatz der Algebra
  "Alle Polynome sind über $\mathbb{C}$ vollständig faktorisierbar."

Kapitel 2: Folgen und Reihen

- Folgen, Konvergenz, Grenzwerte
- Rechenregeln für Grenzwerte
- Satz von Weierstrass
  "Monotone beschränkte Folgen sind konvergent"
- Limes superior, Limes inferior
  als grösster / kleinster Häufungspunkt einer Folge
- Cauchy-Folgen
- Intervallschachtelung
- Satz von Bolzano-Weierstrass
  "Beschränkte Folgen haben konvergente Teilfolgen"
- Folgen in $\mathbb{R}^n$ und in $\mathbb{C}$
- Reihen:
  - Reihenkonvergenz
  - geometrische Reihe
  - Vergleichssatz
  - Absolute Konvergenz $\leftrightarrow$ Konvergenz von $\sum_{n=1} |a_n|$
  - Alternierende Reihen, Leibniz-Kriterium

- Umordnungen von Reihen
- Quotienten- und Wurzelkriterium
- Potenzreihen + Konvergenzradius
- Doppelreihen, Cauchy-Produkt von absolut konvergenten Reihen
- Exponentialreihe und ihr Additionstheorem

"$\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ $\qquad \exp(z+w) = \exp(z)\exp(w)$"

Kapitel 3: Stetige Funktionen

- Reellwertige Funktionen, Beschränktheit, Monotonie
- Stetigkeit:
  - ε-δ-Definition
  - Folgenstetigkeit "$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(a)$"
- Zwischenwertsatz

  "Stetige Funktionen auf Intervallen nehmen jeden Wert zwischen zwei Funktionswerten an."

- Min-Max-Satz

  "Stetige Funktionen auf kompakten Intervallen nehmen Maximum und Minimum an."

- Stetigkeit von Umkehrabbildungen
- reelle Exponentialfunktion und ihre Eigenschaften $\exp : \mathbb{R} \to (0,\infty)$
- natürlicher Logarithmus $\ln : (0,\infty) \to \mathbb{R}$
- Konvergenz von Funktionenfolgen
  - punktweise vs. gleichmässig
  - Stetigkeit der Grenzfunktion bei gleichmässiger Konvergenz
- Stetigkeit von Potenzreihen
- Trigonometrische Funktionen, die Kreiszahl π
- Grenzwerte von Funktionen "$\lim\limits_{x \to x_0}$, $\lim\limits_{x \to \infty}$, $\lim\limits_{x \to -\infty}$"
  - Definition über Folgenkonvergenz
  - Rechenregeln, Beispiele
  - einseitige Grenzwerte "$\lim\limits_{x \to x_0^+}$, $\lim\limits_{x \to x_0^-}$"

Kapitel 4: Differenzierbare Funktionen

- Definition über Grenzwert von Differenzenquotienten "$f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$"
- Tangenten an Funktionen

- Rechenregeln für die Ableitung
  - Linearität
  - Produkt- und Quotientenregel
  - Kettenregel
  - Ableitung der Umkehrabbildung "$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$"
- Notwendiges Kriterium für lokale Extrema: "$f'=0$"
- Satz von Rolle
- Mittelwertsatz:

  "$\exists \xi \in (a,b): \quad f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$"

- Zusammenhang zwischen Monotonie und 1. Ableitung
- Arcusfunktionen und deren Ableitung
- Regel von L'Hospital für Grenzwerte von $\frac{f(x)}{g(x)}$

  "im Grenzfall $\frac{0}{0}$ oder $\pm\frac{\infty}{\infty}$ darf man Zähler und Nenner ableiten"

- Konvexe Funktionen
- Höhere Ableitungen und glatte Funktionen

- Ableitung von Potenzreihen

$$T_n f(x; x_0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

Taylor-Polynom vom Grad n

- Taylor-Approximation

"$\exists \xi$ zwischen x und x_0: $f(x) = T_n f(x; x_0) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$"

- Hinreichendes Kriterium für lokale Extrema

"$f'(x_0) = \dots = f^{(2k-1)}(x_0) = 0$ $\begin{cases} f^{(2k)}(x_0) > 0 \implies \text{lok. Min} \\ f^{(2k)}(x_0) < 0 \implies \text{lok. Max.} \end{cases}$"

Kapitel 5: Das Riemann Integral

- Definition über Partitionen, Ober-/Untersummen
- Maschenweite von Partitionen
- Riemann-Summen

"$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}),\quad \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$"

- Integrierbare Funktionen:
  - grundlegende Operationen erhalten Integrierbarkeit
  - Linearität des Integrals
  - Stetige Funktionen sind integrierbar
  - Monotone Funktionen sind integrierbar

- Monotonie + Dreiecksungleichung für Integrale
- Cauchy-Schwarz-Ungleichung

"$$\left|\int_a^b f\cdot g\,dx\right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2\,dx}\cdot\sqrt{\int_a^b g^2\,dx}$$"

- Mittelwertsatz für Integrale
- Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung
  - Existenz von Stammfunktionen stetiger Funktionen

    "$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$"

  - Berechnung von bestimmten Integralen über Stammfunktionen

    "$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$"

- partielle Integration
- Substitution
- Flächeninhalt von Kreisen, Volumen von Kugeln
- Unbestimmte Integrale, Technik des Integrierens

- Partialbruchzerlegung
  - Fall "nur reelle Nullstellen des Nenners"
  - Fall "auch komplexe Nullstellen des Nenners"
- Funktionenfolgen und Integration
- Integration von Potenzreihen
- Uneigentliche Integrale
- Vergleichssatz zwischen Reihen und uneig. Integral
- Stirling-Formel

" $n! \sim \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}$ "