D–ITET / RW

Probeprüfung Analysis I & II

401-0231-10L & 401-0232-10L

Nachname	*Vorname*	*Legi-Nr.*
XX	**XX**	**XX-000-000**
		Prüfungs-Nr.
		000

Bitte noch nicht umblättern!

Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.

Aufgabe 1

1.MC1 [2 Punkte] Formulieren Sie die Negation der folgenden Aussage:

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \exists\, m \in \mathbb{N} : (m > n) \wedge (m < 2n)$$

(A) $\forall\, n \in \mathbb{N}, \nexists\, m \in \mathbb{N} : (m > n) \wedge (m < 2n)$

(B) $\forall\, n \in \mathbb{N}, \exists\, m \in \mathbb{N} : (m \leq n) \vee (m \geq 2n)$

(C) $\exists\, n \in \mathbb{N}, \forall\, m \in \mathbb{N} : (m \leq n) \vee (m \geq 2n)$

(D) $\exists\, n \in \mathbb{N}, \forall\, m \in \mathbb{N} : (m < n) \wedge (m > 2n)$

1.MC2 [2 Punkte] Betrachten Sie die folgende Abbildung:

$$f : [-1, \infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2 - 1$$

Welche der folgenden Aussagen ist korrekt?

(A) f ist injektiv, aber nicht surjektiv.

(B) f ist surjektiv, aber nicht injektiv.

(C) f ist bijektiv.

(D) f ist weder injektiv noch surjektiv.

1.MC3 [2 Punkte] Bestimmen Sie das Supremum der folgenden Teilmenge von $\mathbb{R}$:

$$\{1 - \tfrac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\} \cap [\tfrac{1}{2}, 2]$$

(A) $\frac{1}{2}$

(B) 1

(C) 2

(D) Die Teilmenge besitzt kein Supremum.

1.MC4 [2 Punkte] Bestimmen Sie alle komplexen Nullstellen des folgenden Polynoms in $\mathbb{C}$:

$$z^3 + z$$

(A) 0

(B) 0, 1 und -1

(C) 0, i und $-i$

(D) i und $-i$

1.MC5 [2 Punkte] Berechnen Sie für die folgende Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} a_n$, falls dieser existiert.

$$a_n = \frac{(n+2)^2 - (n+1)^2}{n+3}$$

(A) 0
(B) 1
(C) 2
(D) Die Folge konvergiert nicht.

1.MC6 [2 Punkte] Die folgende Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt mindestens einen Häufungspunkt:

$$a_n = \sin(n) - \cos(n)$$

(A) Wahr
(B) Falsch

1.MC7 [2 Punkte] Bestimmen Sie alle Häufungspunkte der folgenden Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$a_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}$$

(A) Die Folge hat keine Häufungspunkte.
(B) 1
(C) 0 und 1
(D) 1 und -1

1.MC8 [2 Punkte] Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge mit

$$|a_n| < \frac{1}{n^2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dann konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

(A) Wahr
(B) Falsch

1.MC9 [2 Punkte] Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihe:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 2^n x^n$$

(A) 0
(B) $\frac{1}{2}$
(C) 1
(D) 2

1.MC10 [2 Punkte] Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Falls gilt

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = f(0) \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} f\left(-\frac{1}{n}\right) = f(0),$$

dann ist f stetig an der Stelle 0.

(A) Wahr
(B) Falsch

1.MC11 [2 Punkte] Berechnen Sie, falls dieser existiert, den folgenden Grenzwert:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2}$$

(A) $\frac{1}{2}$
(B) 1
(C) -1
(D) Der Grenzwert existiert nicht.

1.MC12 [2 Punkte] Die folgende Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig auf $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{für} \quad x \leq 0 \\ x\log(x) & \text{für} \quad x > 0 \end{cases}$$

(A) Wahr
(B) Falsch

1.MC13 **[2 Punkte]** Betrachten Sie die folgende Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x \leq 0 \\ x^a & \text{für} \quad x > 0, \end{cases}$$

wobei $a \in \mathbb{R}$ ein Parameter ist. Für welchen der folgenden Werte von a ist f an der Stelle $x = 0$ differenzierbar?

(A) $a = \frac{1}{2}$

(B) $a = 1$

(C) $a = \frac{3}{2}$

(D) Keine der obigen Werte.

1.MC14 **[2 Punkte]** Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(1) = 2$ und $f(2) = 1$. Dann existiert ein $x \in (1, 2)$ mit $f(x) = x$.

(A) Wahr

(B) Falsch

1.MC15 **[2 Punkte]** Es existiert eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Klasse C^1, sodass gilt

$$f(0) = 1, \qquad \lim_{x\to\infty} f(x) = 0, \qquad \text{und} \qquad f'(x) \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(A) Wahr

(B) Falsch

1.MC16 **[2 Punkte]** Welche der folgenden Aussagen gilt NICHT für alle $f \in C^2(\mathbb{R})$?

(A) Für alle $x \in \mathbb{R}$, existiert $\xi \in \mathbb{R}$ mit $|\xi| \leq |x|$, sodass $f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(\xi)x^2$.

(B) Es existiert eine Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sodass $f(x) = f(0) + f'(0)x + x^2 g(x)$.

(C) Es existiert ein $C > 0$, sodass $|f(x) - f(0) - f'(0)x| \leq Cx^2$ für alle $x \in [-1, 1]$.

(D) $\lim_{x\to 0} x^{-2}(f(x) - f(0) - f'(0)x) = 0$.

1.MC17 **[2 Punkte]** Es sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Finden Sie eine Lösung zur folgenden Differentialgleichung:

$$f'(x) + f(x) = g(x)$$

(A) $f(x) = e^x g(x)$

(B) $f(x) = \int_0^x g(t)\, dt$

(C) $f(x) = e^{-x} \int_0^x e^t g(t)\, dt$

(D) $f(x) = e^x \int_0^x g(t)\, dt$

1.MC18 [2 Punkte] Wir betrachten die gewöhnliche Differentialgleichung

$$f'' + f = 0$$

für eine zweimal differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Welche der folgenden Aussagen trifft zu?

(A) Diese Gleichung besitzt keine Lösung.

(B) Diese Gleichung besitzt genau zwei Lösungen.

(C) Diese Gleichung besitzt unendlich viele Lösungen.

(D) Der Vektorraum aller Lösungen dieser Gleichung ist (reell) eindimensional.

1.MC19 [2 Punkte] Welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ ist offen?

(A)
$$\mathbb{N}$$

(B)
$$\bigcup_{n=1}^{\infty} (n, n+1)$$

(C)
$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$$

(D)
$$[-1, 0) \cup (0, 1]$$

1.MC20 [2 Punkte] Betrachten Sie die folgende Funktion:

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \qquad f(x, y, z) = xyz.$$

Bestimmen Sie die Richtung des steilsten Anstiegs von f im Punkt $(1, 1, 0)$.

(A) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(B) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(C) $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(D) $\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

1.MC21 [2 Punkte] Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine differenzierbare Abbildung mit

$$f(0,0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{und} \qquad df(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Weiter sei

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad g(x,y) = x^2 y.$$

Bestimmen Sie $d(g \circ f)(0,0)$, das Differential der Komposition $g \circ f$ an der Stelle $(0,0)$.

(A) $d(g \circ f)(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$

(B) $d(g \circ f)(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$

(C) $d(g \circ f)(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$

(D) $d(g \circ f)(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \end{pmatrix}$

1.MC22 [2 Punkte] Wir betrachten das Vektorfeld

$$X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad X(x) := \begin{pmatrix} e^{\cos(x_1)} \\ \sin(e^{x_2}) \end{pmatrix}$$

($x_i :=$ i-te Komponente von x) und den Weg

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \qquad \gamma(t) := \big(\cos(t), \sin(t)\big).$$

Berechnen Sie das Wegintegral von X längs γ.

(A) $\int X \cdot d\gamma = -\pi$

(B) $\int X \cdot d\gamma = 0$

(C) $\int X \cdot d\gamma = \pi$

(D) $\int X \cdot d\gamma = 2\pi$

1.MC23 [2 Punkte] Bestimmen Sie das Taylorpolynom zweiten Grades der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sin(x_1)e^{x_2}$$

um den Punkt $(0,0)$.

(A) $T^2_{f,(0,0)}(x) = 1 + 2x_1x_2$

(B) $T^2_{f,(0,0)}(x) = x_1 + x_1x_2$

(C) $T^2_{f,(0,0)}(x) = x_1 + x_1^2$

(D) $T^2_{f,(0,0)}(x) = x_2 + x_1^2 + x_2^2$

1.MC24 [2 Punkte] Berechnen Sie die Menge $\mathrm{Crit}\, f$ der kritischen Punkte der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \frac{x_1^3}{3} + \frac{x_1^2}{2} + x_2^2.$$

(A) $\mathrm{Crit}\, f = \Big\{(0,0), (-1,0)\Big\}$

(B) $\mathrm{Crit}\, f = \Big\{(0,0), (1,0)\Big\}$

(C) $\mathrm{Crit}\, f = \Big\{(0,0), (0,-1)\Big\}$

(D) $\mathrm{Crit}\, f = \Big\{(0,0), (0,1)\Big\}$

1.MC25 [2 Punkte] Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die eindeutige glatte Funktion, sodass

$$e^{x-g(x)} - g(x) = 0, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Berechnen Sie die Ableitung von g an der Stelle $x = 1$.

(A) $g'(1) = -1$

(B) $g'(1) = -\frac{1}{2}$

(C) $g'(1) = \frac{1}{2}$

(D) $g'(1) = 1$

1.MC26 [2 Punkte] Wir betrachten die glatte Kurve in $\mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$C := \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\Big|\, x^3 + x + y^5 + y = 0\Big\}.$$

Berechnen Sie den Tangentialraum an C im Punkt $(x,y) = (1,-1)$.

(A) $T_{(1,-1)}C = \Big\{(2t, -3t) \,\Big|\, t \in \mathbb{R}\Big\}$

(B) $T_{(1,-1)}C = \Big\{(2t, 3t) \,\Big|\, t \in \mathbb{R}\Big\}$

(C) $T_{(1,-1)}C = \Big\{(3t, -2t) \,\Big|\, t \in \mathbb{R}\Big\}$

(D) $T_{(1,-1)}C = \Big\{(3t, 2t) \,\Big|\, t \in \mathbb{R}\Big\}$

1.MC27 [2 Punkte] Berechnen Sie das folgende wiederholte Integral:

$$I := \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Big(\int_0^1 \sin\Big(\cos(x_1)x_2\Big) dx_1\Big)\, dx_2$$

(A) $I = -\pi$

(B) $I = 0$

(C) $I = \pi$

(D) $I = \frac{\pi}{2}$

1.MC28 [2 Punkte] Betrachten Sie die folgende glatte Fläche in $\mathbb{R}^3$ mit Rand:

$$\Sigma := \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_3 = x_1^2 + x_2^2,\, x_3 \leq 1\}.$$

Welcher der folgenden Ausdrücke ist gleich dem Flächeninhalt von Σ?

(A)

$$\int_{\overline{B}_1(0)} \left\| \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_1^2 + y_2^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_1^2 + y_2^2 \end{pmatrix} \right\| dy$$

(B)

$$\int_{\overline{B}_1(0)} \left\| \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_1^2 + y_2^2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_1^2 + y_2^2 \end{pmatrix} \right\| dy$$

(C)

$$\int_{\overline{B}_1(0)} \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2y_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2y_2 \end{pmatrix} \right\| dy$$

(D)

$$\int_{\overline{B}_1(0)} \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2y_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2y_2 \end{pmatrix} \right\| dy$$

Aufgabe 2

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei:

$$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, \qquad f_n(x) = \frac{1}{1+nx^2}$$

2.A1 [3 Punkte] Zeigen Sie, dass die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für $n \to \infty$ punktweise auf $[0,1]$ gegen eine Funktion

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}$$

konvergiert und bestimmen Sie $f(x)$ für $x \in [0,1]$.

2.A2 [2 Punkte] Konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmässig gegen f auf $[0,1]$? Begründen Sie Ihre Antwort.

2.A3 [2 Punkte] Es sei nun $r \in (0,1)$ beliebig. Betrachten Sie die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eingeschränkt auf das Intervall $[r,1]$. Zeigen Sie, dass diese Funktionenfolge gleichmässig auf $[r,1]$ konvergiert.

Aufgabe 3

3.A1 [3 Punkte] Berechnen Sie das folgende Integral:

$$\int_0^1 x^3 e^{x^2}\, dx$$

3.A2 [4 Punkte] Berechnen Sie das folgende Integral:

$$\int_0^1 \frac{x}{(x+2)(x+1)}\, dx$$

3.A3 [3 Punkte] Es sei $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Betrachten Sie für jedes $n \in \mathbb{N}$ die folgende Zerlegung des Intervalls $[0,2]$ in disjunkte Teilintervalle:

$$[0,2] = \bigcup_{k=1}^{2n} I_k^n,$$

wobei

$$I_1^n = \left[0, \frac{1}{n}\right], \qquad I_k^n = \left(\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right], \quad \forall k \in \{2, 3, \ldots, 2n\}.$$

Betrachten Sie weiter für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Summe

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

Berechnen Sie den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

für die folgenden Funktionen f:

(i) $f(x) = x^2$

(ii) $f(x) = \cos(\pi x)$

Aufgabe 4

Es seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^2$ die folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^2$:

$$V = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid v > 0\}, \qquad U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0,\ y > 0\}.$$

Betrachten Sie die folgende Abbildung:

$$\Psi : V \to U, \qquad \Psi(u,v) := \begin{pmatrix} ve^{u} \\ ve^{-u} \end{pmatrix}$$

4.A1 [3 Punkte] Berechnen Sie die Determinante des Differentials von Ψ:

$$\det\Big(D\Psi(u,v)\Big).$$

4.A2 [5 Punkte] Zeigen Sie, dass Ψ ein glatter Diffeomorphismus von V auf U ist.

Bemerkung: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass Ψ glatt ist.

4.A3 [3 Punkte] Es sei nun $S \subseteq \mathbb{R}^2$ das folgende Gebiet:

$$S = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\Big|\; x > 0,\ \frac{1}{x} < y < \frac{4}{x},\ y < x < 2y\Big\}.$$

Wir betrachten Ψ als Koordinatentransformation, also $x = ve^{u}$ und $y = ve^{-u}$. Schreiben Sie S in den Koordinaten (u,v), das heisst, bestimmen Sie die Menge

$$\Psi^{-1}(S) = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid \Psi(u,v) \in S\}.$$

4.A4 [3 Punkte] Verwenden Sie Ψ als Substitution, um den Flächeninhalt von S zu bestimmen.

Aufgabe 5

Betrachten Sie die folgende Funktion auf $\mathbb{R}^2$:

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad F(x,y) = x^2 - 6x - y^3 + y^2$$

5.A1 [6 Punkte] Bestimmen Sie alle kritischen Punkte von F auf $\mathbb{R}^2$ und bestimmen Sie, ob es sich dabei um lokale Minima, lokale Maxima oder Sattelpunkte handelt.

5.A2 [6 Punkte] Wir bezeichnen mit $S_2^1(0)$ den Kreis um den Nullpunkt in $\mathbb{R}^2$ mit Radius 2 und mit f die Einschränkung von F auf $S_2^1(0)$. Bestimmen Sie alle kritischen Punkte von f.

5.A3 [4 Punkte] Bestimmen Sie das Maximum und das Minimum von F auf der abgeschlossenen Kreisscheibe

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

Hinweis: *Es gilt* $\sqrt{2} \approx 1.4$

Aufgabe 6

Wir betrachten die Menge

$$\Sigma := \left\{ \left(y, e^{(\|y\|^2)} \right) \,\middle|\, y \in \overline{B}_1^2(0) \right\}.$$

Das ist eine glatte Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$ mit Rand. (Sie brauchen das **nicht** zu zeigen.)

6.A1 [**4 Punkte**] Berechnen Sie eine Koorientierung (= ein Einheitsnormalvektorfeld) ν auf Σ.

Bemerkung: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass eine bestimmte Abbildung eine globale glatte Parametrisierung von Σ ist, falls das tatsächlich zutrifft.

6.A2 [**3 Punkte**] Wir betrachten das Vektorfeld

$$X : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad X(x) := \begin{pmatrix} x_1 \sin\left(e^{x_1+x_2}\right) \\ x_2 \sin\left(e^{x_1+x_2}\right) \\ \cos\left(e^{x_1-x_2}\right) \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie den Fluss

$$\int_\Sigma \begin{pmatrix} D_2X^3 - D_3X^2 \\ D_3X^1 - D_1X^3 \\ D_1X^2 - D_2X^1 \end{pmatrix} \cdot \nu \, dA.$$

Bemerkung: Sie können diesen Teil der Aufgabe selbst dann lösen, wenn Sie den ersten Teil nicht lösen konnten.