Aufgaben und Lösungsvorschlag

Aufgabe 1

1.MC1 [2 Punkte] Formulieren Sie die Negation der folgenden Aussage:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N} : (m > n) \wedge (m < 2n)$$

(A) $\forall n \in \mathbb{N}, \nexists m \in \mathbb{N} : (m > n) \wedge (m < 2n)$

(B) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N} : (m \leq n) \vee (m \geq 2n)$

(C) $\exists n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N} : (m \leq n) \vee (m \geq 2n)$

(D) $\exists n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N} : (m < n) \wedge (m > 2n)$

Lösung:

$\exists n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N} : (m \leq n) \vee (m \geq 2n)$

1.MC2 [2 Punkte] Betrachten Sie die folgende Abbildung:

$$f : [-1, \infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2 - 1$$

Welche der folgenden Aussagen ist korrekt?

(A) f ist injektiv, aber nicht surjektiv.

(B) f ist surjektiv, aber nicht injektiv.

(C) f ist bijektiv.

(D) f ist weder injektiv noch surjektiv.

Lösung:

f ist weder injektiv noch surjektiv.

1.MC3 [2 Punkte] Bestimmen Sie das Supremum der folgenden Teilmenge von $\mathbb{R}$:

$$\{1 - \tfrac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\} \cap [\tfrac{1}{2}, 2]$$

(A) $\frac{1}{2}$

(B) 1

(C) 2

(D) Die Teilmenge besitzt kein Supremum.

Lösung:

1

1.MC4 [2 Punkte] Bestimmen Sie alle komplexen Nullstellen des folgenden Polynoms in $\mathbb{C}$:

$$z^3 + z$$

(A) 0
(B) 0, 1 und -1
(C) 0, i und $-i$
(D) i und $-i$

Lösung:

0, i und $-i$

1.MC5 [2 Punkte] Berechnen Sie für die folgende Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} a_n$, falls dieser existiert.

$$a_n = \frac{(n+2)^2 - (n+1)^2}{n+3}$$

(A) 0
(B) 1
(C) 2
(D) Die Folge konvergiert nicht.

Lösung:

2

1.MC6 [2 Punkte] Die folgende Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt mindestens einen Häufungspunkt:

$$a_n = \sin(n) - \cos(n)$$

(A) Wahr
(B) Falsch

Lösung:

Wahr

1.MC7 [2 Punkte] Bestimmen Sie alle Häufungspunkte der folgenden Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$a_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}$$

(A) Die Folge hat keine Häufungspunkte.
(B) 1
(C) 0 und 1
(D) 1 und -1

Lösung:

1 und -1

1.MC8 [2 Punkte] Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge mit

$$|a_n| < \frac{1}{n^2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dann konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

(A) Wahr
(B) Falsch

Lösung:

Wahr

1.MC9 [2 Punkte] Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihe:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 2^n x^n$$

(A) 0
(B) $\frac{1}{2}$
(C) 1
(D) 2

Lösung:

$\frac{1}{2}$

1.MC10 [2 Punkte] Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Falls gilt

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = f(0) \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} f\left(-\frac{1}{n}\right) = f(0),$$

dann ist f stetig an der Stelle 0.

(A) Wahr

(B) Falsch

Lösung:

Falsch

1.MC11 [2 Punkte] Berechnen Sie, falls dieser existiert, den folgenden Grenzwert:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2}$$

(A) $\frac{1}{2}$

(B) 1

(C) -1

(D) Der Grenzwert existiert nicht.

Lösung:

$\frac{1}{2}$

1.MC12 [2 Punkte] Die folgende Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig auf $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{für} \quad x \leq 0 \\ x\log(x) & \text{für} \quad x > 0 \end{cases}$$

(A) Wahr

(B) Falsch

Lösung:

Wahr

1.MC13 [2 Punkte] Betrachten Sie die folgende Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x \leq 0 \\ x^a & \text{für} \quad x > 0, \end{cases}$$

wobei $a \in \mathbb{R}$ ein Parameter ist. Für welchen der folgenden Werte von a ist f an der Stelle $x = 0$ differenzierbar?

(A) $a = \frac{1}{2}$
(B) $a = 1$
(C) $a = \frac{3}{2}$
(D) Keine der obigen Werte.

Lösung:

$a = \frac{3}{2}$

1.MC14 [2 Punkte] Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(1) = 2$ und $f(2) = 1$. Dann existiert ein $x \in (1, 2)$ mit $f(x) = x$.

(A) Wahr
(B) Falsch

Lösung:

Wahr

1.MC15 [2 Punkte] Es existiert eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Klasse C^1, sodass gilt

$$f(0) = 1, \qquad \lim_{x\to\infty} f(x) = 0, \qquad \text{und} \qquad f'(x) \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(A) Wahr
(B) Falsch

Lösung:

Falsch

1.MC16 [2 Punkte] Welche der folgenden Aussagen gilt NICHT für alle $f \in C^2(\mathbb{R})$?

(A) Für alle $x \in \mathbb{R}$, existiert $\xi \in \mathbb{R}$ mit $|\xi| \leq |x|$, sodass $f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(\xi)x^2$.
(B) Es existiert eine Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sodass $f(x) = f(0) + f'(0)x + x^2 g(x)$.
(C) Es existiert ein $C > 0$, sodass $|f(x) - f(0) - f'(0)x| \leq Cx^2$ für alle $x \in [-1, 1]$.
(D) $\lim_{x\to 0} x^{-2}(f(x) - f(0) - f'(0)x) = 0$.

Lösung:

$\lim_{x\to 0} x^{-2}(f(x) - f(0) - f'(0)x) = 0.$

1.MC17 [2 Punkte] Es sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Finden Sie eine Lösung zur folgenden Differentialgleichung:

$$f'(x) + f(x) = g(x)$$

(A) $f(x) = e^x g(x)$
(B) $f(x) = \int_0^x g(t)\,dt$
(C) $f(x) = e^{-x} \int_0^x e^t g(t)\,dt$
(D) $f(x) = e^x \int_0^x g(t)\,dt$

Lösung:

$f(x) = e^{-x} \int_0^x e^t g(t)\,dt$

1.MC18 [2 Punkte] Wir betrachten die gewöhnliche Differentialgleichung

$$f'' + f = 0$$

für eine zweimal differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Welche der folgenden Aussagen trifft zu?

(A) Diese Gleichung besitzt keine Lösung.
(B) Diese Gleichung besitzt genau zwei Lösungen.
(C) Diese Gleichung besitzt unendlich viele Lösungen.
(D) Der Vektorraum aller Lösungen dieser Gleichung ist (reell) eindimensional.

Lösung:

Diese Gleichung besitzt unendlich viele Lösungen.

1.MC19 [2 Punkte] Welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ ist offen?

(A)
$$\mathbb{N}$$

(B)
$$\bigcup_{n=1}^{\infty} (n, n+1)$$

(C)
$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$$

(D)
$$[-1, 0) \cup (0, 1]$$

Lösung:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}(n, n+1)$$

1.MC20 [2 Punkte] Betrachten Sie die folgende Funktion:

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \qquad f(x, y, z) = xyz.$$

Bestimmen Sie die Richtung des steilsten Anstiegs von f im Punkt $(1, 1, 0)$.

(A) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(B) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(C) $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(D) $\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Lösung:

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

1.MC21 [2 Punkte] Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine differenzierbare Abbildung mit

$$f(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{und} \qquad df(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Weiter sei

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad g(x, y) = x^2 y.$$

Bestimmen Sie $d(g \circ f)(0, 0)$, das Differential der Komposition $g \circ f$ an der Stelle $(0, 0)$.

(A) $d(g \circ f)(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$

(B) $d(g \circ f)(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$

(C) $d(g \circ f)(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$

(D) $d(g \circ f)(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \end{pmatrix}$

Lösung:

$d(g \circ f)(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$

1.MC22 [2 Punkte] Wir betrachten das Vektorfeld

$$X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad X(x) := \begin{pmatrix} e^{\cos(x_1)} \\ \sin(e^{x_2}) \end{pmatrix}$$

($x_i :=$ i-te Komponente von x) und den Weg

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \qquad \gamma(t) := \big(\cos(t), \sin(t)\big).$$

Berechnen Sie das Wegintegral von X längs γ.

(A) $\int X \cdot d\gamma = -\pi$
(B) $\int X \cdot d\gamma = 0$
(C) $\int X \cdot d\gamma = \pi$
(D) $\int X \cdot d\gamma = 2\pi$

Lösung:

$\int X \cdot d\gamma = 0$

1.MC23 [2 Punkte] Bestimmen Sie das Taylorpolynom zweiten Grades der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sin(x_1) e^{x_2}$$

um den Punkt $(0, 0)$.

(A) $T^2_{f,(0,0)}(x) = 1 + 2x_1 x_2$
(B) $T^2_{f,(0,0)}(x) = x_1 + x_1 x_2$
(C) $T^2_{f,(0,0)}(x) = x_1 + x_1^2$
(D) $T^2_{f,(0,0)}(x) = x_2 + x_1^2 + x_2^2$

Lösung:

$T^2_{f,(0,0)}(x) = x_1 + x_1 x_2$

1.MC24 [2 Punkte] Berechnen Sie die Menge $\mathrm{Crit}\, f$ der kritischen Punkte der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \frac{x_1^3}{3} + \frac{x_1^2}{2} + x_2^2.$$

(A) $\operatorname{Crit} f = \Big\{(0,0),(-1,0)\Big\}$

(B) $\operatorname{Crit} f = \Big\{(0,0),(1,0)\Big\}$

(C) $\operatorname{Crit} f = \Big\{(0,0),(0,-1)\Big\}$

(D) $\operatorname{Crit} f = \Big\{(0,0),(0,1)\Big\}$

Lösung:

$\operatorname{Crit} f = \Big\{(0,0),(-1,0)\Big\}$

1.MC25 [2 Punkte] Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die eindeutige glatte Funktion, sodass

$$e^{x-g(x)} - g(x) = 0, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Berechnen Sie die Ableitung von g an der Stelle $x = 1$.

(A) $g'(1) = -1$

(B) $g'(1) = -\frac{1}{2}$

(C) $g'(1) = \frac{1}{2}$

(D) $g'(1) = 1$

Lösung:

$g'(1) = \frac{1}{2}$

1.MC26 [2 Punkte] Wir betrachten die glatte Kurve in $\mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$C := \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\Big|\, x^3 + x + y^5 + y = 0\Big\}.$$

Berechnen Sie den Tangentialraum an C im Punkt $(x,y) = (1,-1)$.

(A) $T_{(1,-1)}C = \Big\{(2t,-3t) \,\Big|\, t \in \mathbb{R}\Big\}$

(B) $T_{(1,-1)}C = \Big\{(2t,3t) \,\Big|\, t \in \mathbb{R}\Big\}$

(C) $T_{(1,-1)}C = \Big\{(3t,-2t) \,\Big|\, t \in \mathbb{R}\Big\}$

(D) $T_{(1,-1)}C = \Big\{(3t,2t) \,\Big|\, t \in \mathbb{R}\Big\}$

Lösung:

$$T_{(1,-1)}C = \Big\{(3t, -2t) \,\Big|\, t \in \mathbb{R}\Big\}$$

1.MC27 [2 Punkte] Berechnen Sie das folgende wiederholte Integral:

$$I := \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^1 \sin\Big(\cos(x_1)x_2\Big) dx_1 \right) dx_2$$

(A) $I = -\pi$

(B) $I = 0$

(C) $I = \pi$

(D) $I = \frac{\pi}{2}$

Lösung:

$$I = 0$$

1.MC28 [2 Punkte] Betrachten Sie die folgende glatte Fläche in $\mathbb{R}^3$ mit Rand:

$$\Sigma := \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_3 = x_1^2 + x_2^2,\, x_3 \leq 1\}.$$

Welcher der folgenden Ausdrücke ist gleich dem Flächeninhalt von Σ?

(A)

$$\int_{\overline{B}_1(0)} \left\| \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_1^2 + y_2^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_1^2 + y_2^2 \end{pmatrix} \right\| dy$$

(B)

$$\int_{\overline{B}_1(0)} \left\| \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_1^2 + y_2^2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_1^2 + y_2^2 \end{pmatrix} \right\| dy$$

(C)

$$\int_{\overline{B}_1(0)} \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2y_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2y_2 \end{pmatrix} \right\| dy$$

(D)

$$\int_{\overline{B}_1(0)} \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2y_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2y_2 \end{pmatrix} \right\| dy$$

Lösung:

$$\boxed{\int_{\overline{B}_1(0)} \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2y_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2y_2 \end{pmatrix} \right\| dy}$$

Aufgabe 2

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei:

$$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, \qquad f_n(x) = \frac{1}{1+nx^2}$$

2.A1 [3 Punkte] Zeigen Sie, dass die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für $n \to \infty$ punktweise auf $[0,1]$ gegen eine Funktion

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}$$

konvergiert und bestimmen Sie $f(x)$ für $x \in [0,1]$.

Lösung:

Sei $x > 0$ fix. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x^2 n + 1} = 0.$$

Dies erkennt man zum Beispiel an

$$\left|\frac{1}{x^2 n + 1}\right| \leq \frac{1}{n}\left|\frac{1}{x^2 + \frac{1}{n}}\right| \leq \frac{1}{x^2}\frac{1}{n}.$$

Also konvergiert $f_n(x)$ für jedes $x \in (0,1]$ gegen 0.

Andererseits gilt für $x = 0$, $f_n(0) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also konvergiert $f_n(0)$ auch gegen 1. f_n konvergiert also punktweise auf $[0,1]$ gegen die Funktion

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad x = 0 \\ 0 & \text{für} \quad x \in (0,1] \end{cases}$$

2.A2 [2 Punkte] Konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmässig gegen f auf $[0,1]$? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung:

Nein. Die Funktionen f_n sind stetig auf $[0,1]$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Falls also $f_n \to f$ gleichmässig auf $[0,1]$, müsste auch f stetig sein auf $[0,1]$. Dies ist aber offensichtlich nicht der Fall. Daher kann die konvergenz nicht gleichmässig sein.

Alternativ kann man auch dirket argumentieren. Zum Beispiel kann man erkennen, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sup_{x\in[0,1]} \left|f(x) - f_n(x)\right| \geq \left|f(\frac{1}{\sqrt{n}}) - f_n(\frac{1}{\sqrt{n}})\right| = \frac{1}{1 + n(\frac{1}{\sqrt{n}})^2} = \frac{1}{2}.$$

Also konvergiert die Funktionenfolge nicht gleichmässig.

2.A3 [2 Punkte] Es sei nun $r \in (0,1)$ beliebig. Betrachten Sie die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eingeschränkt auf das Intervall $[r,1]$. Zeigen Sie, dass diese Funktionenfolge gleichmässig auf $[r,1]$ konvergiert.

Lösung:

Auf $[r,1]$ konvergiert $f_n(x)$ punktweise gegen $f(x) = 0$. Da für alle $n \in \mathbb{N}$ die Funktion $f_n(x)$ auf $[r,1]$ monoton fallend ist, gilt

$$\sup_{x\in[r,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[r,1]} \frac{1}{1+nx^2} = \frac{1}{1+nr^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

wobei wir verwendet haben, dass $r > 0$. Also konvergiert f_n gleichmässig auf dem Intervall $[r,1]$.

Aufgabe 3

3.A1 [3 Punkte] Berechnen Sie das folgende Integral:

$$\int_0^1 x^3 e^{x^2}\, dx$$

Lösung:

Wir verwenden die Substitution $y = x^2$ mit $dy = 2x\, dx$:

$$\int_0^1 x^3 e^{x^2}\, dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x^2 e^{x^2} 2x\, dx = \frac{1}{2}\int_0^1 y e^y\, dy.$$

Nun führt eine partielle Integration zum Ziel:

$$\frac{1}{2}\int_0^1 y e^y\, dy = \frac{1}{2}\Big(y e^y \Big|_{y=0}^{y=1} - \int_0^1 e^y\, dy \Big) = \frac{1}{2}\Big(e - e^y \Big|_{y=0}^{y=1} \Big) = \frac{1}{2}\Big(e - (e-1) \Big) = \frac{1}{2}$$

Alternativ kann man auch mit der partiellen Integration beginnen:

$$\int_0^1 x^3 e^{x^2}\, dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x^2 \frac{d}{dx} e^{x^2}\, dx = \frac{1}{2}\Big(x^2 e^{x^2} \Big|_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 2x e^{x^2}\, dx \Big) = \frac{1}{2}\Big(e - \int_0^1 e^y\, dy \Big) = \frac{1}{2},$$

wobei in einem zweiten Schritt wieder die Substition $y = x^2$ verwendet wurde.

3.A2 [4 Punkte] Berechnen Sie das folgende Integral:

$$\int_0^1 \frac{x}{(x+2)(x+1)}\, dx$$

Lösung:

Hier führt eine Partialbruchzerlegung zum Ziel. Wir verwenden den Ansatz:

$$\frac{x}{(x+2)(x+1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+1},$$

mit $A, B \in \mathbb{R}$. Multipliziert man diese Gleichung mit $(x+2)(x+1)$, so sieht man, dass gelten muss

$$x = A(x+1) + B(x+2),$$

und somit

$$A + B = 1, \quad A + 2B = 0.$$

Lösen dieses linearen Gleichungssystems ergibt $A = 2$, $B = -1$, also

$$\frac{x}{(x+2)(x+1)} = \frac{2}{x+2} - \frac{1}{x+1}.$$

Nun lässt sich das Integral leicht berechnen

$$\int_0^1 \frac{x}{(x+2)(x+1)}\,dx = \int_0^1 \frac{2}{x+2}\,dx - \int_0^1 \frac{1}{x+1}\,dx = 2\log(x+2)\Big|_{x=0}^{x=1} - \log(x+1)\Big|_{x=0}^{x=1}$$
$$= 2\log(3) - 2\log(2) - \log(2) + \log(1) = 2\log(3) - 3\log(2)$$

3.A3 [3 Punkte] Es sei $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Betrachten Sie für jedes $n \in \mathbb{N}$ die folgende Zerlegung des Intervalls $[0,2]$ in disjunkte Teilintervalle:

$$[0,2] = \bigcup_{k=1}^{2n} I_k^n,$$

wobei

$$I_1^n = \left[0, \frac{1}{n}\right], \qquad I_k^n = \left(\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right], \quad \forall k \in \{2,3,\ldots,2n\}.$$

Betrachten Sie weiter für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Summe

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

Berechnen Sie den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

für die folgenden Funktionen f:

(i) $f(x) = x^2$

(ii) $f(x) = \cos(\pi x)$

Lösung:

Wir erkennen in der Summe

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

eine Riemann-Summe. Es gilt jeweils

$$x_k^n = \frac{k}{n} \in I_k^n, \quad \text{und} \quad |I_k^n| = \frac{1}{n},$$

wobei $|I_k^n|$ die Länge des Intervalls bezeichnet. Die Summe lässt sich also schreiben als

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \sum_{k=1}^{2n} f(x_k^n)|I_k^n|.$$

Da die Funktion f stetig ist und die Feinheit der Zerlegung für $n \to \infty$ gegen 0 geht, ergibt der Grenzwert dieser Riemann-Summen das Riemann-Integral von f über $[0,2]$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^2 f(x)\,dx.$$

Setzt man nun die gegebenen Funktionen ein, findet man:

(i)
$$\int_0^2 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_{x=0}^{x=2} = \frac{8}{3}$$

(ii)
$$\int_0^2 \cos(\pi x)\,dx = \frac{1}{\pi}\sin(\pi x)\Big|_{x=0}^{x=2} = 0$$

Aufgabe 4

Es seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^2$ die folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^2$:

$$V = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid v > 0\}, \qquad U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0,\, y > 0\}.$$

Betrachten Sie die folgende Abbildung:

$$\Psi : V \to U, \qquad \Psi(u, v) := \begin{pmatrix} ve^u \\ ve^{-u} \end{pmatrix}$$

4.A1 [3 Punkte] Berechnen Sie die Determinante des Differentials von Ψ:

$$\det\Big(D\Psi(u, v)\Big).$$

Lösung:

Wir berechnen:

$$D\Psi(u, v) = \begin{pmatrix} ve^u & e^u \\ -ve^{-u} & e^{-u} \end{pmatrix},$$

und die Determinante lautet

$$\det\Big(D\Psi(u, v)\Big) = ve^u e^{-u} - (-ve^{-u} e^u) = 2v.$$

4.A2 [5 Punkte] Zeigen Sie, dass Ψ ein glatter Diffeomorphismus von V auf U ist.

Bemerkung: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass Ψ glatt ist.

Lösung:

Hier kann man den Umkehrsatz verwenden. Es gilt $\det\Big(D\Psi(u, v)\Big) = 2v > 0$ für alle $(u, v) \in V$. Also ist das Differential von Ψ überall auf V invertierbar. Falls wir also zeigen, dass $\Psi : V \to U$ bijektiv ist, so ergibt sich aus dem Umkehrsatz und der Glattheit von Ψ, dass Ψ^{-1} glatt ist.

Wir zeigen also Injektivität von Ψ. Seien $(u_1, v_1), (u_2, v_2) \in V$ mit $\Psi(u_1, v_1) = \Psi(u_2, v_2)$. Dann gilt

$$v_1 e^{u_1} = v_2 e^{u_2}, \qquad v_1 e^{-u_1} = v_2 e^{-u_2}.$$

Multiplizieren dieser beiden Gleichungen ergibt $v_1^2 = v_2^2$. Da $v_1, v_2 > 0$, muss also gelten $v_1 = v_2$. Nun können wir $v_1 = v_2$ in der ersten Gleichung kürzen und erhalten $e^{u_1} = e^{u_2}$. Da die Exponentialfunktion injektiv ist, muss gelten $u_1 = u_2$. Dies zeigt, dass Ψ injektiv ist.

Nun zeigen wir Surjektivität von Ψ. Sei $(x, y) \in U$. Wir müssen $(u, v) \in V$ finden mit

$$\Psi(u, v) = (ve^u, ve^{-u}) = (x, y).$$

Durch Multiplizieren und Dividieren der beiden Gleichungen sehen wir, dass $v^2 = xy$ und

$e^{2u} = \frac{x}{y}$. Da $xy, \frac{x}{y} > 0$ für $(x,y) \in V$ können wir die Wurzel respektive den Logarithmus nehmen, und finden $v = \sqrt{xy}$, $u = \frac{1}{2}\log(\frac{x}{y})$. Dies ist der gesuchte Punkt in U, und somit ist Ψ surjektiv.

Alternativ könnte man bei dieser Aufgabe auch explizit die Inverse Ψ^{-1} von Ψ berechnen. Man geht vor wie beim Beweis der Surjektivität oben und findet als Kandidat

$$\Psi^{-1}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\log(\frac{x}{y}) \\ \sqrt{xy} \end{pmatrix}.$$

Dies definiert eine Abbildung $\Psi^{-1} : U \to V$, und man kann kontrollieren, dass tatsächlich gilt

$$\Psi \circ \Psi^{-1}(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \Psi^{-1} \circ \Psi(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Dies zeigt die Bijektivität von Ψ. Da $x, y > 0$ auf U, also auch $xy > 0$ und $\frac{x}{y} > 0$, sieht man durch explizites Berechnen der partiellen Ableitungen, dass $\Psi^{-1} : U \to V$ glatt ist.

4.A3 [3 Punkte] Es sei nun $S \subseteq \mathbb{R}^2$ das folgende Gebiet:

$$S = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\Big|\; x > 0,\ \frac{1}{x} < y < \frac{4}{x},\ y < x < 2y\Big\}.$$

Wir betrachten Ψ als Koordinatentransformation, also $x = ve^u$ und $y = ve^{-u}$. Schreiben Sie S in den Koordinaten (u,v), das heisst, bestimmen Sie die Menge

$$\Psi^{-1}(S) = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid \Psi(u,v) \in S\}.$$

Lösung:

Mit $x = ve^u$ und $y = ve^{-u}$ finden wir:

$$\frac{1}{x} < y < \frac{4}{x} \quad \iff \quad \frac{1}{v}e^{-u} < ve^{-u} < \frac{4}{v}e^{-u} \quad \iff \quad 1 < v^2 < 4,$$

wobei wir für die letzte Ungleichung mit $ve^u > 0$ multipliziert haben. Da $v > 0$, muss gelten $1 < v < 2$. Auf ähnliche Weise:

$$y < x < 2y \quad \iff \quad ve^{-u} < ve^u < 2ve^{-u} \quad \iff \quad 1 < e^{2u} < 2,$$

wobei wir für die letzte Ungleichung mit $\frac{1}{v}e^u > 0$ multipliziert haben. Nehmen wir nun den Logarithmus, finden wir $0 < u < \frac{1}{2}\log(2)$. Die gesuchte Menge ist also:

$$\Psi^{-1}(S) = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid u \in (0, \tfrac{1}{2}\log(2)),\ v \in (1,2),\}$$

4.A4 [3 Punkte] Verwenden Sie Ψ als Substitution, um den Flächeninhalt von S zu bestimmen.

Lösung:

Wir schreiben

$$z = (x, y), \qquad w = (u, v).$$

Mit der Substitutionsregel finden wir

$$\mathrm{Vol}_2(S) = \int_S 1\, dz = \int_{\Psi^{-1}(S)} \Big|\det\Big(D\Psi(w)\Big)\Big|\, dw = \int_{\Psi^{-1}(S)} 2v\, dw.$$

Da das Gebiet $\Psi^{-1}(S)$ ein Quader ist (nicht so wie S selbst), ist das Integral einfach auszuwerten:

$$\begin{aligned}
\int_{\Psi^{-1}(S)} 2v\, dw &= \int_0^{\frac{1}{2}\log(2)} \left(\int_1^2 2v\, dv\right) du \qquad \text{(gemäss dem Satz von Fubini)} \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}\log(2)} v^2\Big|_{v=1}^{v=2}\, du \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}\log(2)} 3\, du \\
&= \frac{3}{2}\log(2).
\end{aligned}$$

Aufgabe 5

Betrachten Sie die folgende Funktion auf $\mathbb{R}^2$:

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad F(x,y) = x^2 - 6x - y^3 + y^2$$

5.A1 [6 Punkte] Bestimmen Sie alle kritischen Punkte von F auf $\mathbb{R}^2$ und bestimmen Sie, ob es sich dabei um lokale Minima, lokale Maxima oder Sattelpunkte handelt.

Lösung:

Wir berechnen die Ableitung von F:

$$DF(x,y) = \begin{pmatrix} 2x-6 & -3y^2+2y \end{pmatrix}.$$

Ein kritischer Punkt erfüllt $DF(x,y) = 0$, also

$$2x - 6 = 0, \qquad -3y^2 + 2y = 0.$$

Dies ergibt $x = 3$, und für y gibt es zwei Lösungen $y = 0$ oder $y = \frac{2}{3}$. Die kritischen Punkte von F auf $\mathbb{R}^2$ sind also $(3,0)$ und $(3, \frac{2}{3})$.

Um die kritischen Punkte zu klassifizieren, berechnen wir die Hesse-Matrix von F:

$$\mathrm{Hess}_F(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(x,y) \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x,y) & \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -6y+2 \end{pmatrix}$$

Für die kritischen Punkte finden wir:

$$\mathrm{Hess}_F(3,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{Hess}_F(3, \tfrac{2}{3}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Somit ist $(3,0)$ ein lokales Minimum von F (weil die Hesse-Matrix dort positiv definit ist) und $(3, \frac{2}{3})$ ist ein Sattelpunkt (weil die Hesse-Matrix dort indefinit ist).

5.A2 [6 Punkte] Wir bezeichnen mit $S^1_2(0)$ den Kreis um den Nullpunkt in $\mathbb{R}^2$ mit Radius 2 und mit f die Einschränkung von F auf $S^1_2(0)$. Bestimmen Sie alle kritischen Punkte von f.

Lösung:

Wir verwenden die Lagrange-Multiplikatorenregel. Dazu definieren wir die Funktion

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad g(x,y) := x^2 + y^2 - 4.$$

Wir bezeichnen mit

$$L := L_{F,g} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad L(x,y,\lambda) := F(x,y) - \lambda^T g(x,y) = F(x,y) - \lambda g(x,y)$$

die Lagrangefunktion für (F, g). Gemäss der Lagrange-Multiplikatorenregel ist (x, y) genau dann ein kritischer Punkt von f, falls es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ gibt, sodass (x, y, λ) ein kritischer Punkt von L ist, d.h.,

$$\begin{gathered}\begin{pmatrix}2x-6 & -3y^2+2y\end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix}2x & 2y\end{pmatrix} = DF(x,y) - \lambda Dg(x,y) = 0,\\ x^2+y^2-4 = g(x,y) = 0,\end{gathered}$$

d.h.,

$$\begin{aligned} 2(1-\lambda)x - 6 &= 0 \qquad \text{(I)}\\ -3y^2 + 2(1-\lambda)y &= 0 \qquad \text{(II)}\\ x^2+y^2-4 &= 0 \qquad \text{(III)}\end{aligned}$$

Die Gleichung (II) hat zwei Lösungen für y: $y = 0$ oder $y = \frac{2}{3}(1-\lambda)$. Aus $y = 0$ und Gleichung (III) folgt $x = 2$ oder $x = -2$. Man vergewissere sich, dass zu beiden Lösungen auch ein λ existiert, sodass die Gleichung (I) erfüllt ist. Dies führt zu den beiden kritischen Punkten $(2, 0)$ und $(-2, 0)$.

Die andere Lösung, $y = \frac{2}{3}(1-\lambda)$, kann auch geschrieben werden als $2(1-\lambda) = 3y$. Eingesetzt in Gleichung (I) finden wir $3xy - 6 = 0$, also $y = \frac{2}{x}$. Wir setzen dies in Gleichung (III) ein:

$$x^2 + \frac{4}{x^2} - 4 = 0, \qquad \Longrightarrow \qquad x^4 - 4x^2 + 4 = 0,$$

wobei wir beide Seiten mit x^2 multipliziert haben. Dies ist eine quadratische Gleichung für x^2, die mit der üblichen Formel gelöst werden kann, oder man bemerkt direkt, dass

$$x^4 - 4x^2 + 4 = (x^2-2)^2 = 0,$$

also gilt $x^2 = 2$ und $x = \sqrt{2}$ oder $-\sqrt{2}$. Mit $y = \frac{2}{x}$ finden wir die beiden kritischen Punkte $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ und $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$. Insgesamt besitzt f also vier kritische Punkte:

$$(2,0), \quad (-2,0), \quad (\sqrt{2},\sqrt{2}), \quad (-\sqrt{2},-\sqrt{2}).$$

Alternativ könnte man auch mit einer Parametrisierung des Kreises arbeiten. Sei zum Beispiel

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \qquad \gamma(t) = \begin{pmatrix}2\cos(t)\\ 2\sin(t).\end{pmatrix}$$

Eingesetzt in f finden wir

$$(f\circ\gamma)(t) = 4\cos^2(t) - 8\sin^3(t) + 4\sin^2(t) - 12\cos(t) = 4 - 12\cos(t) - 8\sin^3(t).$$

Die Ableitung der Komposition $f \circ \gamma$ ist dann

$$(f\circ\gamma)'(t) = 12\sin(t) - 24\sin^2(t)\cos(t).$$

Um die kritischen Punkte zu finden, setzen wir $(f \circ \gamma)'(t) = 0$, also muss

$$\sin(t) - 2\sin^2(t)\cos(t) = 0.$$

Wir bemerken, dass $\sin(t) = 0$ eine Lösung ist. Dies passiert für $t = 0$ und $t = \pi$. Eingesetzt in γ ergibt dies die Punkte $\gamma(0) = (2, 0)$ und $\gamma(\pi) = (-2, 0)$.

Falls $\sin(t) \neq 0$, können wir in der Gleichung oben mit $\sin(t)$ dividieren und finden

$$2\sin(t)\cos(t) = 1.$$

Da $2\sin(t)\cos(t) = \sin(2t)$, suchen wir also Lösungen in $[0, 2\pi]$ von $\sin(2t) = 1$. Dies gilt für $t = \frac{\pi}{4}$ und $t = \frac{5\pi}{4}$, was den Punkten $\gamma(\frac{\pi}{4}) = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$ und $\gamma(\frac{5\pi}{4}) = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ entspricht.

5.A3 **[4 Punkte]** Bestimmen Sie das Maximum und das Minimum von F auf der abgeschlossenen Kreisscheibe

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

Hinweis: *Es gilt* $\sqrt{2} \approx 1.4$

Lösung:

Falls das Maximum / Minimum im Innern der Kreisscheibe liegt, dann muss es ein kritischer Punkt von F sein. Da weder $(3, 0)$ noch $(3, \frac{3}{2})$ auf der Kreisscheibe liegen, kann das Maximum / Minimum nicht im Innern liegen, sondern wird auf dem Rand angenommen. Das heisst, die einzigen Kandidaten sind die kritischen Punkte mit Nebenbedingung aus der vorherigen Teilaufgabe. Wir setzen diese in F ein:

$$F(2, 0) = -8, \quad F(-2, 0) = 16, \quad F(\sqrt{2}, \sqrt{2}) = 4 - 8\sqrt{2}, \quad F(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = 4 + 8\sqrt{2}.$$

Mit Hilfe des Hinweises sehen wir, dass $-8 < 4 - 8\sqrt{2} < 4 + 8\sqrt{2} < 16$. Also ist das Minimum von F auf S gleich -8 und das Maximum 16.

Aufgabe 6

Wir betrachten die Menge
$$\Sigma := \left\{ \left(y, e^{(\|y\|^2)} \right) \,\middle|\, y \in \overline{B}_1^2(0) \right\}.$$
Das ist eine glatte Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$ mit Rand. (Sie brauchen das **nicht** zu zeigen.)

6.A1 [**4 Punkte**] Berechnen Sie eine Koorientierung (= ein Einheitsnormalvektorfeld) ν auf Σ.

Bemerkung: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass eine bestimmte Abbildung eine globale glatte Parametrisierung von Σ ist, falls das tatsächlich zutrifft.

Lösung:

Wir definieren die Abbildung
$$\psi : \overline{B}_1^2(0) \to \mathbb{R}^3, \qquad \psi(y) := \begin{pmatrix} y \\ e^{(\|y\|^2)} \end{pmatrix}.$$
Diese Abbildung ist eine globale glatte Parametrisierung von Σ. Wir berechnen
$$D_1\psi(y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2y_1 e^{(\|y\|^2)} \end{pmatrix}, \quad D_2\psi(y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2y_2 e^{(\|y\|^2)} \end{pmatrix}, \quad D_1\psi(y) \times D_2\psi(y) = \begin{pmatrix} -2y_1 e^{(\|y\|^2)} \\ -2y_2 e^{(\|y\|^2)} \\ 1 \end{pmatrix}.$$
Wir definieren die Abbildung $\nu : \Sigma \to \mathbb{R}^3$ durch
$$\begin{aligned} \nu(x) &:= \frac{D_1\psi(y) \times D_2\psi(y)}{\left\| D_1\psi(y) \times D_2\psi(y) \right\|} \qquad (y := \psi^{-1}(x) = (x_1, x_2)) \\ &= \frac{\begin{pmatrix} -2x_1 e^{x_1^2+x_2^2} \\ -2x_2 e^{x_1^2+x_2^2} \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{4\left(x_1^2+x_2^2\right) e^{2\left(x_1^2+x_2^2\right)} + 1}}. \end{aligned}$$
Diese Abbildung ist eine Koorientierung von Σ.

6.A2 [**3 Punkte**] Wir betrachten das Vektorfeld
$$X : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad X(x) := \begin{pmatrix} x_1 \sin\left(e^{x_1+x_2}\right) \\ x_2 \sin\left(e^{x_1+x_2}\right) \\ \cos\left(e^{x_1-x_2}\right) \end{pmatrix}.$$
Berechnen Sie den Fluss
$$\int_\Sigma \begin{pmatrix} D_2X^3 - D_3X^2 \\ D_3X^1 - D_1X^3 \\ D_1X^2 - D_2X^1 \end{pmatrix} \cdot \nu \, dA.$$

Bemerkung: Sie können diesen Teil der Aufgabe selbst dann lösen, wenn Sie den ersten Teil nicht lösen konnten.

Lösung:

Der intrinsische Rand von Σ ist gegeben durch

$$\partial\Sigma = \psi\left(\partial \overline{B}_1^2(0)\right) = S^1 \times \{e\}$$

Die durch ν induzierte Orientierung von $\partial\Sigma$ ist gegeben durch

$$T : \partial\Sigma \to \mathbb{R}^3, \qquad T(x) = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Daraus folgt, dass $X \cdot T = 0$ auf $\partial\Sigma$. Es gilt

$$\begin{aligned}\int_\Sigma \begin{pmatrix} D_2X^3 - D_3X^2 \\ D_3X^1 - D_1X^3 \\ D_1X^2 - D_2X^1 \end{pmatrix} \cdot \nu \, dA &= \int_\Sigma (\nabla \times X) \cdot \nu \, dA \\ &= \int_{\partial\Sigma} X \cdot T \, ds \qquad \text{(gemäss dem Satz von Stokes)} \\ &= 0.\end{aligned}$$