1.1. Partielle Integration

(a) Wir integrieren zuerst die gegebene Funktion und werten sie im letzen Schritt aus.

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} 4x\cos(2-3x)dx &= (4x)\left(-\frac{1}{3}\sin(2-3x)\right)\Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{-4}{3}\sin(2-3x)dx \\ &= -\frac{4}{3}x\sin(2-3x)\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{4}{9}\cos(2-3x)\Big|_{-\pi}^{\pi}.\end{aligned}$$

Auswerten der Funktion für die gegebenen Grenzen ergibt:

$$\int_{-\pi}^{\pi} 4x\cos(2-3x)dx = -\frac{4\pi}{3}(\sin(2-3\pi)+\sin(2+3\pi)) + \frac{4}{9}(\cos(2-3\pi)-\cos(2+3\pi))$$

(b)

$$\begin{aligned}\int_{6}^{0}(2+5x)e^{\frac{1}{3}x}dx &= (2+5x)3e^{\frac{1}{3}x}\Big|_{6}^{0} - \int_{6}^{0} 15e^{\frac{1}{3}x}dx \\ &= 3e^{\frac{1}{3}x}(2+5x)\Big|_{6}^{0} - 45e^{\frac{1}{3}x}\Big|_{6}^{0} \\ &= \left(15xe^{\frac{1}{3}x} - 39e^{\frac{1}{3}x}\right)\Big|_{6}^{0}.\end{aligned}$$

Auswerten der Funktion für die gegebenen Grenzen ergibt:

$$\int_{6}^{0}(2+5x)e^{\frac{1}{3}x}\,dx = -39-51e^{2}$$

(c) Wir wenden zwei Mal partielle Integration an.

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}(3x+x^2)\sin(2x)dx &= -\frac{1}{2}(3x+x^2)\cos(2x)\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(3+2x)\cos(2x)dx \\ &= -\frac{1}{2}(3x+x^2)\cos(2x)\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(3+2x)\sin(2x)\Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi}\sin(2x)dx\right] \\ &= -\frac{1}{2}(3x+x^2)\cos(2x)\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{4}(3+2x)\sin(2x)\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{4}\cos(2x)\Big|_{-\pi}^{\pi}.\end{aligned}$$

Einsetzen der angegebenen Randwerte ergibt das Ergebnis.

1.2. Variation der Konstanten

(a) Zuerst finden wir eine Lösung zur entsprechenden homegenen Differentialgleichung:

$$y'_{\text{hom}} - 3y_{\text{hom}} = 0,$$

also wo die rechte Seite Null gesetzt wurde. Es ist leicht zu erkennen, das die homogene Lösung gegeben ist druch $y_{\text{hom}}(x) = Ce^{3x}$, wobei $C \in \mathbb{R}$ eine konstante ist. Dies kann man auch wie folgt sehen: die Gleichung entspricht umgeformt

$$\frac{y'_{\text{hom}}}{y_{\text{hom}}} = 3$$

Integrieren wir beide Seiten nach x finden wir

$$\int \frac{y'_{\text{hom}}(x)}{y_{\text{hom}}(x)}\, dx = \int 3\, dx.$$

Verwenden wir auf der linken Seite die Substitutionsregel, so finden wir

$$\log(y_{\text{hom}}(x)) = 3x + c,$$

wobei $c \in \mathbb{R}$ eine Integrationskonstante ist. Exponentieren beider Seiten ergibt:

$$y_{\text{hom}}(x) = Ce^{3x},$$

wobei wir $C = e^c$ umgeschrieben haben.

Um nun die ursprüngliche, inhomogene, Differentialgleichung zu lösen, verwenden wir den Ansatz:

$$y(x) = C(x)e^{3x}.$$

Wir nehmen also die homogene Lösung und ersetzten die Konstante mit einer Funktion von x. Diese Methode wird Variation der Konstanten genannt. Setzen wir nun den Ansatz in die Differentialgleichung ein, finden wir:

$$C'e^{3x} + 3Ce^{3x} - 3Ce^{3x} = e^{5x}.$$

Daraus folgt

$$C' = e^{2x}.$$

Integrieren ergibt:

$$C = \int e^{2x} dx = \frac{1}{2}e^{2x} + K,$$

wobei $K \in \mathbb{R}$ eine Konstante ist. Durch Einsetzen in den Ansatz, finden wir die Lösung:

$$y(x) = (\frac{1}{2}e^{2x} + K)e^{3x} = \frac{1}{2}e^{5x} + Ke^{3x}, \quad K \in \mathbb{R}.$$

(b) Wir gehen gleich vor wie in der ersten Teilaufgabe.
Homogene Lösung: $y_{\text{hom}}(x) = Ce^{3x}$
Ansatz: $y(x) = C(x)e^{3x}$
Ableiten und Einsetzen: $C'e^{3x} + 3Ce^{3x} - 3Ce^{3x} = e^{3x}$
Daraus folgt: $C' = 1$
Integration ergibt: $C = x + K$
Und die Lösung lautet. $y(x) = xe^{3x} + Ke^{3x}$, $K \in \mathbb{R}$.

(c) Homogene Lösung: $y_{\text{hom}}(x) = Ce^{x}$
Ansatz: $y(x) = C(x)e^{x}$
Ableiten und Einsetzen: $C'e^{x} + Ce^{x} - Ce^{x} = \sin(x)$
Es folgt: $C' = \sin(x)e^{-x}$
Integrieren ergibt: $C = \int \sin(x)e^{-x}dx$.
Wir berechnen das Integral mit Hilfe von partieller Integration:

$$
\begin{aligned}
C = \int \sin(x)e^{-x}dx &= -e^{-x}\sin(x) + \int \cos(x)e^{-x}dx \\
&= -e^{-x}\sin(x) - e^{-x}\cos(x) - C
\end{aligned}
$$

Es folgt: $C = -\frac{1}{2}e^{-x}(\sin(x) + \cos(x)) + K$
Und die Lösung lautet damit: $y(x) = -\frac{1}{2}(\sin(x) + \cos(x)) + Ke^{x}$, $K \in \mathbb{R}$

1.3. Homogene Differentialgleichungen

(a) Die allgemeine Lösung kann von dem charakterisitischen Polynom abgelesen werden (siehe Satz 5.6.3 im Skript). Dies folgt auch unter Verwendung des Exponentialansatzes $y(x) = e^{\lambda x}$. Eingesetzt in die Differentialgleichung ergibt dieser Ansatz:

$$y'' + y' - 2y = (\lambda^2 + \lambda - 2)e^{\lambda x} = 0.$$

Das charakteristische Polynom ist also

$$p(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda + 2)(\lambda - 1)$$

mit den beiden verschiedenen Nullstellen $\lambda = -2$ und $\lambda = 1$. Dies ergibt mit dem Exponentialansatz die zwei unabhängigen Lösungen e^{-2x} und e^{x}. Da der Lösungsraum einer Differentialgleichung zweiter Ordnung ein zwei-dimensionaler Vektorraum ist, ist die allgemeine Lösung deshalb gegeben durch

$$y(x) = Ae^{-2x} + Be^{x},$$

mit $A, B \in \mathbb{R}$ beliebige Konstanten.

(b) Das charakteristische Polynom ist

$$p(\lambda) = \lambda^4 - 4\lambda^2 = \lambda^2(\lambda + 2)(\lambda - 2).$$

Es hat eine doppelte Nullstelle bei $\lambda = 0$ und einfache Nullstellen bei $\lambda = -2$ und $\lambda = 2$. Die allgemeine Lösung ist deshalb

$$y(x) = A + Bx + Ce^{-2x} + De^{2x}.$$

(c) Das charakteristische Polynom ist

$$p(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 4)^2.$$

Es hat zwei doppelte Nullstellen bei $\lambda = 1, 4$. Die allgemeine Lösung ist deshalb

$$y(x) = Ae^x + Bxe^x + Ce^{4x} + Dxe^{4x}.$$

1.4. Federpendel

(a) Das Hookesche Gesetz gibt die Kraft, welche die Feder ausübt:

$$F_0 = -kx.$$

Das Stokesche Reibungsgesetz beschreibt die Kraft, die durch die Reibung entsteht:

$$F_R = -c\dot{x}$$

Mit dem zweiten Newtonschen Gesetz finden wir:

$$m\ddot{x} = F_{Feder} + F_{Reibung} = -c\dot{x} - kx.$$

Umgeschrieben mit den Parameter δ (Dämpfungskonstante) und ω_0 (Kreisfrequenz des ungedämpften Systems) finden wir

$$\ddot{x} = -\frac{c}{m}\dot{x} - \frac{k}{m}x = -2\delta\dot{x} - \omega_0^2 x,$$

oder

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

(b) Wir nutzen den Exponentialansatz $x(t) = e^{\lambda t}$ und finden:

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = (\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_0^2)e^{\lambda t} = 0,$$

also:

$$\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_0^2 = 0$$

Gemäss der Mitternachtsformel ergibt dies:

$$\lambda = \frac{-2\delta \pm \sqrt{4\delta^2 - 4\omega_0^2}}{2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$$

Es gibt zwei Fälle zu unterscheiden:

a) Falls $\delta < \omega_0$, dann sind beide Lösungen für λ komplex und wir finden mit dem Exponentialansatz komplexe Lösungen:

$$e^{-\delta t} e^{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} it}, \quad e^{-\delta t} e^{-\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} it}$$

Nehmen wir die Summe und die Differenz der beiden Lösungen, so sehen wir:

$$e^{-\delta t} e^{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} it} + e^{-\delta t} e^{-\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} it} = e^{-\delta t}(e^{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} it} + e^{-\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} it}) = 2e^{-\delta t} \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}\, t\right),$$

und ganz analog:

$$e^{-\delta t} e^{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} it} - e^{-\delta t} e^{-\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} it} = 2ie^{-\delta t} \sin\left(\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}\, t\right),$$

unter Verwendung der Eulerschen Formel. Daher lässt sich die allgemeine reelle Lösung schreiben als:

$$x(t) = C \cdot e^{-\delta t} \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}\, t\right) + D \cdot e^{-\delta t} \sin\left(\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}\, t\right),$$

wobei C, D abermals reelle Konstanten sind. Man beachte, dass wir so auf rein reelle Lösungen kommen.

Falls $\delta > \omega_0$, dann sind die Lösungen für λ beide reell und wir haben also:

$$x(t) = C \cdot e^{(-\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})t} + D \cdot e^{(-\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})t}$$

als allgemeine Lösung (hier sind C, D reelle Konstanten).

(c) Im Gegensatz zu $\delta = 0$, was zu gleichmässigen Oszillationen führt, werden für $\delta > 0$ alle allgemeinen Lösungen exponentiell gegen 0 gehen, wenn $t \to +\infty$. Im Fall $\omega_0 > \delta$ gibt es hierbei Oszillationen um 0 mit immer kleiner werdendem Ausschlag, im anderen Fall gibt es keine Oszillationen, nur ein Ausschlag und dann exponentielles annähern an 0. Man beachte, dass im zweiten Fall der Wert $\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} < \delta$ eine Verlangsamung der Konvergenz gegen 0 bewirken kann, falls $C \neq 0$. Dies liegt daran, dass die Feder "zu stark" gedämpft wird und die Dämpfung durch Reibung somit mehr von der Federkraft kompensiert wird als für eine "optimale" Konvergenzgeschwindigkeit wünschenswert wäre (Konvergenz wie $e^{-\delta t}$, wie im oszillatorischen Fall).

1.5. Vektorraum über $\mathbb{R}$

Für $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ folgt dies aus den elementaren Eigenschaften der reellen Zahlen, siehe die Axiome im Kapitel 2.2 des Skripts. Beachten Sie, dass das Identitätselement der abelschen Gruppen $(\mathbb{R}, +)$ durch die Zahl 0 gegeben ist und die Inverse zu einem $x \in \mathbb{R}$ durch die Zahl $-x$ gegeben ist. Beachten Sie auch, dass die Kompatibilität der Multiplikation in $\mathbb{R}$ mit der Skalarmultiplikation, also die zweite Bedingung in der Definition eines Vektorraums, äquivalent ist zur Assoziativität der Multiplikation in $\mathbb{R}$.

Für $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ folgt dies, indem wir komplexe Zahlen $z \in \mathbb{C}$ schreiben als

$$z = x + iy$$

mit $x, y \in \mathbb{R}$. Die Addition in $\mathbb{C}$ ist dann gegeben durch

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2),$$

und die Skalarmultiplikation mit einem $a \in \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$az = a(x + iy) = ax + iay.$$

Die gewünschten Eigenschaften für $\mathbb{C}$ folgen dann aus den entsprechenden Eigenschaften von $\mathbb{R}$. Beachten Sie, dass wieder das Identitätselement der abelschen Gruppen $(\mathbb{C}, +)$ durch die Zahl 0 gegeben ist und die Inverse zu einem $z = x + iy \in \mathbb{C}$ durch die Zahl $-z = -x - iy$ gegeben ist. Beachten Sie auch, dass $\mathbb{C}$ ein zwei-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{R}$ ist. Eine Basis ist gegeben durch $\{1, i\}$.

1.6. Vektorraum von Funktionen

Sei S eine Menge und V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$. Wir definieren

$$\begin{aligned} X &:= V^S, \\ + : X \times X \to X, &\quad (f+g)(s) := f(s) + g(s), \\ \cdot : \mathbb{R} \times X \to X, &\quad (a \cdot f)(s) := a \cdot (f(s)). \end{aligned}$$

(Hier verwenden wir auf der rechten Seite die Addition und Skalarmultiplikation im Vektorraum V.)

Zu überprüfen sind die Bedingungen (i-iv) von einem Vektorraum (siehe Hinweis bei Aufgabe 3 auf der Übungsserie). Bedingung (i), also dass $(X, +)$ eine abelsche Gruppe ist, folgt daraus, dass $(V, +)$ eine abelsche Gruppe ist. Das Identitätselement in X ist die konstante Funktion $0_X(s) = 0_V$ für alle $s \in S$, wobei 0_V das Identitätselement in V ist. Die (additive) Inverse zu einem Element $f \in X$ ist die Funktion $-f$, definiert durch $(-f)(s) := -f(s)$, also zu jedem $s \in S$ wird die (additive) Inverse von $f(s)$ im Vektorraum V zugeordnet.

Auf ähnliche Weise folgen die Bedingungen (ii,iii,iv) für $(X, +, \cdot)$ einfach aus den entsprechenden Bedingungen für den Vektorraum $(V, +, \cdot)$.