4.1. Inneres

Man erinnere sich, dass das Innere Y° von Y aus allen Punkten x besteht, sodass es für irgendein $r > 0$ einen offenen Ball $B_r(x)$ um x gibt, welcher vollständig in Y enthalten ist. Insbesondere gilt $Y^\circ \subseteq Y$.

(a) $Y^\circ =]0, 1[$. Sei $x \in]0, 1[$. Wir setzten $r = \min(x, 1 - x)$. Dann ist

$$B_r(x) =]x - r, x + r[\subseteq Y,$$

also $x \in Y^\circ$. Da $Y^\circ \subseteq Y$, müssen wir nur noch $x = 1$ betrachten. Für jedes $r > 0$ enthält der Ball $B_r(1)$ Punkte y mit $y > 1$ (z.B. $y = 1 + \frac{r}{2}$), also ist $1 \notin Y^\circ$.

(b) $Y^\circ = \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Sei $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ und setzte $r = |x|$. Dann ist $B_r(x) =]x-r, x+r[\subseteq Y$, also $x \in Y^\circ$. Somit gilt $Y^\circ = Y$.

(c) $Y^\circ = \emptyset$. Sei $n \in \mathbb{N}$. Jeder Ball $B_r(\frac{1}{n})$ enthält reelle Zahlen in den Intervallen $(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})$ und $(\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1})$, ist also nicht in Y enthalten.

(d) $Y^\circ = \emptyset$. Trivial da $Y^\circ \subseteq Y$. Ausserdem ist kein Ball in der leeren Menge enthalten.

(e) $Y^\circ = \emptyset$. Für jedes $x \in \mathbb{Q}$ und jeden Ball $B_r(x)$, egal wie klein, gibt es $x \in B_r(x)$ mit $x \notin \mathbb{Q}$. Dies folgt aus den Eigenschaften der reellen und rationalen Zahlen.

(f) $Y^\circ = B_r^d(x_0)$. Das Innere des abgeschlossenen Balls ist der offene Ball. Für $x \in B_r^d(x_0)$ setzten wir $\rho = r - |x|$. Dann ist dank der Dreiecksungleichung $B_\rho(x) \subseteq \overline{B}_r^d(x_0)$. Falls $|x - x_0| = r$, dann enthält jeder Ball $B_\rho(x)$ Punkte y mit $|y - x_0| > r$.

(g) $Y^\circ = B_1^2(0) \cap ((0, \infty) \times \mathbb{R})$. Sei $x = (x_1, x_2) \in B_1^2(0) \cap ((0, \infty) \times \mathbb{R})$. Dann gilt $x_1 > 0$ und $\|x\| < 1$. Setzten wir $r = \min(x_1, 1 - \|x\|)$, dann ist der offene Ball $B_r^2(x)$ in Y enthalten. Andererseits enthält jeder Ball um ein Punkt $(0, x_2)$ Punkte $y = (y_1, y_2)$ mit $y_1 < 0$, und jeder Ball um ein Punkt mit $\|x\| = 1$ enthält Punkte y mit $\|y\| > 1$, also liegen die restlichen Punkte von Y nicht im Inneren.

Eine andere Strategie bei dieser Teilaufgabe wäre zu verwenden, dass für alle Mengen A, B gilt $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$.

4.2. Abgeschlossener Ball ist abgeschlossen

Wir betrachten den abgeschlossenen Ball $\overline{B}_r^d(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \|x - x_0\| \leq r\}$. Das Komplement von $\overline{B}_r^d(x_0)$ ist $\overline{B}_r^d(x_0)^c = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \|x - x_0\| > r\}$. Wir zeigen, dass das Komplement offen ist. Sei also $x \in \overline{B}_r^d(x_0)^c$ und sei

$$y \in B_\rho^d(x) = \{y \in \mathbb{R}^d \mid \|y - x\| < \rho\},$$

wobei wir den Radius ρ noch bestimmen werden. Dank der Dreiecksungleichung für die euklidische Norm gilt

$$\|x - x_0\| \le \|x - y\| + \|y - x_0\|,$$

oder umgeschrieben

$$\|y - x_0\| \ge \|x - x_0\| - \|y - x\|.$$

Da $\|y - x\| < \rho$, gilt also $\|y - x_0\| > \|x - x_0\| - \rho$ für alle $y \in B^d_\rho(x)$. Wählen wir also $0 < \rho \le \|x - x_0\| - r$, dann ist der offene Ball $B^d_\rho(x)$ in $\overline{B}^d_r(x_0)^c$ enthalten. Somit ist $\overline{B}^d_r(x_0)^c$ offen, also $\overline{B}^d_r(x_0)$ abgeschlossen. Wir bemerken übrigens, dass $\|x - x_0\| - r$ gerade die Distanz von x zum Rand des Balls $\overline{B}^d_r(x_0)$ ist.

4.3. De Morgansche Regeln

Es gilt

$$\bigcap_{A\in\mathcal{A}} A = \{x \in X \mid \forall\, A \in \mathcal{A},\, x \in A\}, \quad \bigcup_{A\in\mathcal{A}} A = \{x \in X \mid \exists\, A \in \mathcal{A},\, x \in A\}$$
$$A^c = \{x \in X \mid \neg(x \in A)\}$$

Erinnern Sie sich an die Regeln für Quantoren und die Negation, geschrieben $\neg$, aus Analysis I. Die Aussagen folgen unmittelbar aus diesen Regeln und den explizite Darstellungen der Mengen wie oben.

Wir schreiben

$$\begin{aligned}\Big(\bigcap \mathcal{A}\Big)^c &= \Big\{x \in X \mid \neg\Big(x \in \bigcap_{A\in\mathcal{A}} A\Big)\Big\} = \Big\{x \in X \mid \neg\Big(\forall\, A \in \mathcal{A},\, x \in A\Big)\Big\} \\ &= \Big\{x \in X \mid \exists\, A \in \mathcal{A},\, \neg(x \in A)\Big\} = \Big\{x \in X \mid \exists\, A \in \mathcal{A},\, x \in A^c\Big\} \\ &= \bigcup_{A\in\mathcal{A}} A^c.\end{aligned}$$

Analog finden wir

$$\begin{aligned}\Big(\bigcup \mathcal{A}\Big)^c &= \Big\{x \in X \mid \neg\Big(x \in \bigcup_{A\in\mathcal{A}} A\Big)\Big\} = \Big\{x \in X \mid \neg\Big(\exists\, A \in \mathcal{A},\, x \in A\Big)\Big\} \\ &= \Big\{x \in X \mid \forall\, A \in \mathcal{A},\, \neg(x \in A)\Big\} = \Big\{x \in X \mid \forall\, A \in \mathcal{A},\, x \in A^c\Big\} \\ &= \bigcap_{A\in\mathcal{A}} A^c.\end{aligned}$$

4.4. Eigenschaften abgeschlossener Mengen

Laut Satz 2.18 (Eigenschaften offener Mengen) in den Notizen von Dr. Ziltener gilt $\emptyset$ und $\mathbb{R}^d$ sind offen in $\mathbb{R}^d$. Für das Komplement in $\mathbb{R}^d$ gilt

$$\left(\emptyset\right)^c = \mathbb{R}^d, \quad \left(\mathbb{R}^d\right)^c = \emptyset.$$

Da eine Menge in $\mathbb{R}^d$ gerade abgeschlossen ist, wenn sie das Komplement einer offenen Menge ist, sehen wir, dass $\emptyset$ und $\mathbb{R}^d$ abgeschlossen sind in $\mathbb{R}^d$.

Laut Satz 2.18 (Eigenschaften offener Mengen) gilt auch: Die Vereinigung einer beliebigen Kollektion von offenen Mengen ist offen. Sei nun $\mathcal{A}$ eine beliebige Kollektion von abgeschlossenen Mengen $A \subseteq \mathbb{R}^d$. Wir müssen zeigen, dass $\bigcap \mathcal{A}$ abgeschlossen ist, dass also $(\bigcap \mathcal{A})^c$ offen ist. Per Definition von abgeschlossen, gilt für jede der Mengen A, dass das Komplement A^c offen ist. Unter Verwendung der de Morganschen Regeln aus der vorherigen Aufgabe finden wir

$$\left(\bigcap \mathcal{A}\right)^c = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A^c.$$

Die Menge $(\bigcap \mathcal{A})^c$ ist also eine Vereinigung von offenen Mengen und somit offen.

4.5. Rand

Der Rand einer Menge Y ist $\partial Y = \overline{Y} \setminus Y^\circ$. Aus der Aufgabe 1 und der entsprechenden Aufgabe über den Abschluss in Serie 3 folgt sofort:

(a) $\partial Y = \{0, 1\}$.

(b) $\partial Y = \{0\}$.

(c) $\partial Y = Y \cup \{0\}$.

(d) $\partial Y = \emptyset$.

(e) $\partial Y = \mathbb{R}$.

(f) $\partial Y = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \|x - x_0\| = r\}$.
(Der abgeschlossene Ball ist laut Aufgabe 2 abgeschlossen.)

(g) $\partial Y = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| = 1,\, x_1 \geq 0\} \cup \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \leq 1,\, x_1 = 0\}$.
(Die Abgeschlossenheit der Menge Y lässt sich wie folgt zeigen. Für jedes $x = (x_1, x_2) \in Y^c$ ist entweder $x_1 < 0$ oder $\|x\| > 1$. Im ersten Fall ist der offene Ball um x mit Radius $|x_1|$ in Y^c enthalten, im zweiten Fall der offene Ball mit Radius $1 - \|x\|$. Somit ist Y^c offen.)

4.6. Mittels (Un-)gleichungen definierte Mengen

(a) Wir definieren die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2 + e^x,$$

welche offensichtlich stetig ist. Die Menge in der Aufgabenstellung besteht gerade aus allen $x \in \mathbb{R}$, sodass $f(x) < 2$. Wir können die Menge also als Urbild von f schreiben:

$$\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x^2 + e^x < 2\right\} = f^{-1}\Big((-\infty, 2)\Big).$$

Da $(-\infty, 2)$ offen ist und f stetig, folgt aus Satz 2.29 (Charakterisierung von Stetigkeit mittels offener und abgeschlossener Mengen) in den Notizen von Dr. Ziltener, dass $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + e^x < 2\}$ offen ist.

(b) Wir verwenden wieder Satz 2.29 in den Notizen von Dr. Ziltener. Sei f wie oben und

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad g(x, y) = x^4 + x + y^4 + y.$$

Dann können wir die Mengen in der Aufgabenstellung schreiben als

$$A = f^{-1}\Big((-\infty, 2]\Big), \quad B = f^{-1}\Big(\{2\}\Big), \quad g^{-1}\Big(\{1\}\Big).$$

Da $(-\infty, 2]$, $\{2\}$ und $\{1\}$ alle abgeschlossen sind in $\mathbb{R}$ und f und g stetige Funktionen sind, sind auch A, B und C abgeschlossen.

(c) Wie in der Vorlesung gesehen sind die kompakten Mengen in $\mathbb{R}^d$ gerade die beschränkten abgeschlossenen Mengen. Wir wissen bereits, dass A, B und C abgeschlossen sind und müssen noch die Beschränktheit prüfen. Da $e^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, gilt insbesondere für jedes $x \in A$:

$$x^2 \leq x^2 + e^x \leq 2, \quad \text{also} \quad |x| \leq \sqrt{2}.$$

Somit ist A beschränkt. Da B eine Untermenge von A ist, ist auch B beschränkt (auch für alle $x \in B$ gilt $x^2 + e^x \leq 2$). Die Beschränktheit der Menge C ist etwas mühsamer zu zeigen. Wir bemerken zuerst, dass

$$x^4 + x + y^4 + y \geq x^4 - |x| + y^4 - |y|, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Desweiteren folgt aus $0 \leq (|x| - 1)^2 = x^2 - 2|x| + 1$, dass $|x| \leq \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$. Somit gilt für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$x^4 + x + y^4 + y \geq x^4 - x^2 + y^4 - y^2 - 1 = (x^2 - \tfrac{1}{2})^2 + (y^2 - \tfrac{1}{2})^2 - \tfrac{3}{2}.$$

Also, für alle $(x, y) \in C$ gilt

$$\|(x, y) - (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})\|^2 = (x^2 - \tfrac{1}{2})^2 + (y^2 - \tfrac{1}{2})^2 \leq x^4 + x + y^4 + y + \tfrac{3}{2} = \tfrac{5}{2},$$

was die Beschränktheit von C zeigt.

(d) Die Menge $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^3 + x + y^3 + y = 1\}$ ist zwar abgeschlossen, aber sie ist nicht beschränkt. Dies kann man wie folgt zeigen. Sei $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Funktion gegeben durch $h(x) = x^3 + x$. Dann gilt $\lim_{x\to\infty} h(x) = \infty$ und $\lim_{x\to-\infty} h(x) = -\infty$. Das Bild von h ist also ganz $\mathbb{R}$. Somit existiert für jedes $y \in \mathbb{R}$, egal wie gross $|y|$ ist, ein $x \in \mathbb{R}$, sodass $h(x) = 1 - y^3 - y$. Der Punkt (x, y) liegt dann in der Menge. Da also $\|(x, y)\| \geq |y|$ beliebig gross sein kann, ist die Menge unbeschränkt.

4.7. Maximum und Minimum

Wir wissen aus der vorherigen Aufgabe, dass die Menge

$$\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x^2 + e^x \leq 2\right\}$$

kompakt ist. Die Menge ist auch nicht leer, z.B. ist 0 darin enthalten. Desweiteren ist die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^3 + x$$

offensichtlich stetig. Die Aussage folgt nun, da jede stetige Funktion auf einer nichtleeren kompakten Menge ein Maximum und Minimum annimmt, siehe Korollar 2.14 (stetige Funktion auf kompakter Menge, Maximum, Minimum) in den Notizen von Dr. Ziltener.