5.1. Verknüpfung stetiger Funktionen.

Laut Satz 2.29 (Charakterisierung von Stetigkeit mittels offener und abgeschlossener Men- gen) in den Notizen von Dr. Ziltener ist eine Funktion genau dann stetig, falls das Urbild jeder offenen Menge offen ist. Es ist einfach zu sehen, dass das Urbild der Funktion $g \circ f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^l$ einer Menge $U \subseteq \mathbb{R}^l$ ist die Menge

$$(g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U)) \subseteq \mathbb{R}^d,$$

also das Urbild unter f des Urbildes von U unter g. Sei nun $U \subseteq \mathbb{R}^l$ eine beliebige offene Menge. Dann ist $g^{-1}(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, da g stetig ist. Somit ist auch $f^{-1}(g^{-1}(U))$ offen da f stetig ist. Dies zeigt, dass $g \circ f$ stetig ist.

5.2. Partielle Ableitungen, Jacobi-Matrix.

Um die partielle Ableitung nach der i-ten Variable x_i zu berechnen, betrachten wir die anderen Variablen als Konstanten (sie sind fixiert). Wir finden für jedes i

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = 2x_i.$$

Im Punkt p sind alle Koordinaten 0 ausser $x_1 = 1$, also gilt

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(p) = 2, \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = 0, \quad \forall i \neq 1.$$

Die Jacobi Matrix von $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ im Punkt x ist die $1 \times n$ Matrix

$$df(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 \cdots & 2x_n \end{pmatrix}.$$

Ausgewertet im Punkt p ergibt dies

$$df(p) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = y^2, \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 2xy.$$

Die Jacobi Matrix ist also

$$dg(x,y) = \begin{pmatrix} y^2 & 2xy \end{pmatrix}.$$

Ausgewertet im Punkt $p = (1,1)$ finden wir

$$\frac{\partial g}{\partial x}(1,1) = 1, \quad \frac{\partial g}{\partial y}(1,1) = 2, \quad dg(1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Für jedes $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ist $h(x, y)$, also ein Vektor in $\mathbb{R}^3$. Die partielle Ableitung von h nach x ist der Vektor in $\mathbb{R}^3$, wo jede Komponente von h partielle nach x abgeleitet wird und ähnlich für y. Wir finden also

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = \begin{pmatrix} y^2 \\ ye^{xy} \\ 3x^2 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial h}{\partial y}(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy \\ xe^{xy} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Jacobi Matrix von h ist die 3×2 Matrix mit diesen Vektoren also Spalten, also

$$dh(x,y) = \begin{pmatrix} y^2 & 2xy \\ ye^{xy} & xe^{xy} \\ 3x^2 & 0 \end{pmatrix}$$

Ausgewertet im Punkt $p = (1, 1)$:

$$\frac{\partial h}{\partial x}(1,1) = \begin{pmatrix} 1 \\ e \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial h}{\partial y}(1,1) = \begin{pmatrix} 2 \\ e \\ 0 \end{pmatrix}, \quad dh(1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ e & e \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

5.3. (Totale) Differenzierbarkeit und (totale) Ableitung.

Die Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist im Punkt total differenzierbar, falls es eine lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gibt mit

$$\lim_{v \to 0} \frac{\|g(p+v) - g(p) - Av\|}{\|v\|} = 0.$$

Die gesuchte lineare Abbildung ist hier schon gegeben, nämlich $A(v_1, v_2) = p_2 v_1 + p_1 v_2$. Bemerken Sie aber, dass A jeweils durch die Jacobi Matrix von g im Punkt p gegeben ist. Wir berechnen

$$g(p+v) - g(p) - A(x-p) = (p_1 + v_1)(p_2 + v_2) - p_1 p_2 - p_2 v_1 + p_1 v_2 = v_1 v_2.$$

Somit müssen wir zeigen, dass

$$\lim_{v \to 0} \frac{|v_1 v_2|}{\|(v_1, v_2)\|} = \lim_{v \to 0} \frac{|v_1 v_2|}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}} = 0.$$

Mit der Cauchy-Schwarz Ungleichung folgt

$$\frac{|v_1 v_2|}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}} \le \frac{v_1^2 + v_2^2}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2},$$

und wir sehen $\lim_{v\to 0}\sqrt{v_1^2+v_2^2}=0$.

5.4. Kettenregel.

Es gilt $h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ und

$$h(x)=g(f(x))=g(x_1,e^{x_2})=x_1e^{x_2}.$$

Wir haben in der vorherigen Aufgabe gezeigt, dass g in jedem Punkt total differenzierbar ist, somit auch im Punkt $f(p)$. Wir dürfen verwenden, dass f im Punkt p total differenzierbar ist. Aus der Kettenregl folgt nun, dass $g\circ f$ im Punkt p differenzierbar ist.

Die Ableitung dh von h im Punkt p ist laut Kettenregel die Komposition der Ableitungen $df(p)$ mit $dg(f(p))$. Dargestellt als Matrix (Jacobi Matrix) finden wir

$$df(x)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & e^{x_2}\end{pmatrix},\quad dg(y)=\begin{pmatrix}y_2 & y_1\end{pmatrix},$$

also in $p=(2,0)$ mit $f(p)=(2,1)$:

$$df(p)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad dg(f(p))=\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}.$$

Matrix-Multiplikation führt zur Darstellung der Ableitung von h als Jacobi Matrix:

$$dh(p)=\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}$$

5.5. Differenzierbarkeit und Ableitung der Norm.

Die Funktion $h(x)=\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ kann als Komposition $h(x)=g\circ f(x)$ geschrieben werden, wobei

$$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R},\ f(x)=\sum_{i=1}^n x_i^2,\quad g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(y)=\sqrt{y}.$$

Die Funktion f ist als Polynom auf $\mathbb{R}^n$ in jedem Punkt total differenzierbar, siehe Bemerkung in der Aufgabenstellung. Die Funktion g ist auf dem Intervall $(0,\infty)$ differenzierbar. (Achtung: Im Punkt 0 ist g nicht differenzierbar). Da wir die Funktion h auf $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ betrachten, also weg vom Ursprung, ist h total differenzierbar. Dies folgt aus der Kettenregel: für alle $x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ gilt $f(x)\in(0,\infty)$, somit ist sowohl

f im Punkt x und g im Punkt $f(x)$ total differenzierbar. Wir berechnen die Jacobi Matrizen

$$df(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 & \cdots 2x_n \end{pmatrix}, \quad dg(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

Und mit der Kettenregel:

$$dh(x) = dg(f(x)) \cdot df(x) = \begin{pmatrix} \frac{x_1}{\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}} & \frac{x_2}{\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}} & \cdots \frac{x_n}{\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}} \end{pmatrix}.$$

5.6. Gradient und steilster Anstieg.

Der Gradient einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist die Transponierte der Jacobi Matrix von f, also

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} f(x) \\ \partial_{x_2} f(x) \\ \vdots \\ \partial_{x_n} f(x) \end{pmatrix}.$$

Für $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 4x_2^2$ berechnen wir

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 8x_2 \end{pmatrix}.$$

Die Richtung des steilsten Anstiegs von f im Punkt p ist durch den auf 1 normierten Gradienten im Punkt p gegeben, also

$$\frac{1}{\|\nabla f(p)\|} \nabla f(p).$$

Für $p = (1, 0)$ gilt

$$\nabla f(p) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \|\nabla f(p)\| = \sqrt{4+0} = 2.$$

Somit ist die Richtung des steilsten Anstiegs von f im Punkt p:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Niveaulinie $f^{-1}(\{1\})$ ist gegeben durch

$$f^{-1}(\{1\}) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + 4x_2^2 = 1\}.$$

Es handelt sich dabei um eine Ellipse mit Mittelunkt 0, Hauptachsen-Länge 1 und Nebenachsenlänge $\frac{1}{2}$.

Der Punkt $(1,0)$ erfüllt $f(1,0) = 1$ und liegt somit auf dieser Niveaulinie. Der Gradient einer Funktion f im Punkt p ist immer senkrecht zur Niveaulinie durch $f(p)$, also $f^{-1}(\{f(p)\})$.

5.7. Richtungsableitung

Die Ableitung einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ im Punkt p in Richtung $v \in \mathbb{R}^n$ ist gegeben durch $df(p)v$. In diesem Fall gilt $df(1,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \end{pmatrix}$ und somittg

$$df(1,0)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2, \quad df(1,0)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Die Richtung $(0,1)$ ist im Punkt $(1,0)$ tangential zur Niveaulinie $f^{-1}(\{1\})$, somit ist die Ableitung in diese Richtung 0. Die Richtung $(1,0)$ hingegen zeigt in Richtung des steilsten Anstiegs von f im Punkt $(1,0)$. Die Ableitung in diese Richtung ist somit maximal (also das Maximum von $df(p)v$ über alle Vektoren v mit $\|v\| = 1$).