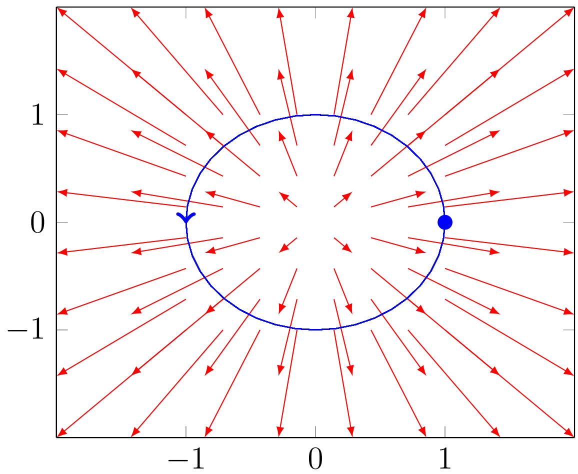
6.1. Wegintegral eines Vektorfeldes.

(a) In rot das Vektorfeld X und in blau der Weg γ mit Start- und Endpunkt und Umlaufrichtung eingezeichnet.



(b) Es gilt

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}, \quad \dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}.$$

Das Euler-Vektorfeld ist einfach die Identitätsabbildung, also gilt

$$X(\gamma(t)) = \gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}.$$

Das Wegintegral lässt sich wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned} \int x \cdot d\gamma &= \int_0^{2\pi} X(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)\, dt = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-\cos(t)\sin(t) + \sin(t)\cos(t))\, dt = \int_0^{2\pi} 0\, dt = 0. \end{aligned}$$

6.2. Konservativität eines Vektorfeldes, Potential.

Der Weg γ_x interpoliert jeweils zwischen dem Ursprung $0 \in \mathbb{R}^n$ und dem Punkt $x \in \mathbb{R}^n$, also

$$\gamma_x : [0, 1] \to \mathbb{R}^n, \quad \gamma_x(t) = tx, \quad \text{mit} \quad \dot{\gamma}_x(t) = x.$$

Die Funktion f lässt sich jeweils wie folgt berechnen:

$$f(x) = \int X \cdot d\gamma_x = \int_0^1 X(\gamma_x(t)) \cdot \dot{\gamma}_x(t)\, dt = \int_0^1 X(tx) \cdot x\, dt,$$

wobei auf der rechten Seite das Skalarprodukt in $\mathbb{R}^n$ zwischen den Vektoren $X(tx)$ und x berechnet werden muss. Falls das Vektorfeld X konservativ ist, dann muss f ein Potential für X sein, siehe Satz 3.32 (Potentiale eines konservativen stetigen Vektorfeldes) im Skript von Dr. Ziltener. Falls also $\nabla f \neq X$ gilt, dann kann X nicht konservativ sein. Das Vorgehen in dieser Aufgabe entspricht der Methode 3.33 (Konservativität, Potential) im Skript von Dr. Ziltener.

Für die beiden Vektorfelder in $\mathbb{R}^2$ ist am Ende der jeweiligen Teilaufgaben das Vektorfeld X gezeichnet. Für eine bessere Darstellung sind die Pfeile fünfmal kürzer dargestellt.

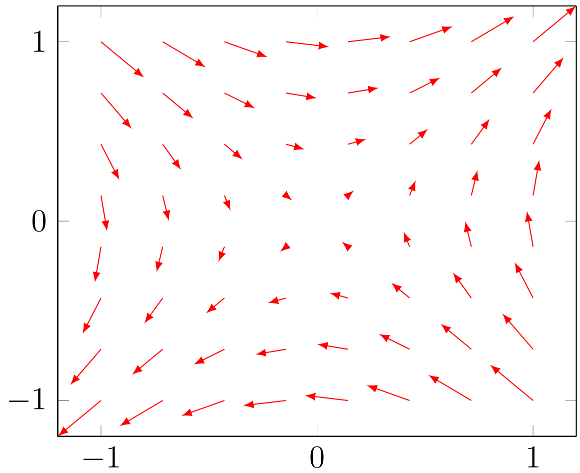
(a) Wir berechnen

$$f(x) = \int_0^1 X(tx)\cdot x\,dt = \int_0^1 \begin{pmatrix} tx_2 \\ tx_1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\,dt = \int_0^1 (tx_2x_1+tx_1x_2)\,dt = 2x_1x_2\int_0^1 t\,dt = x_1x_2.$$

Für den Gradienten gilt

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \partial_{x_1}(x_1x_2) \\ \partial_{x_2}(x_1x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = X(x).$$

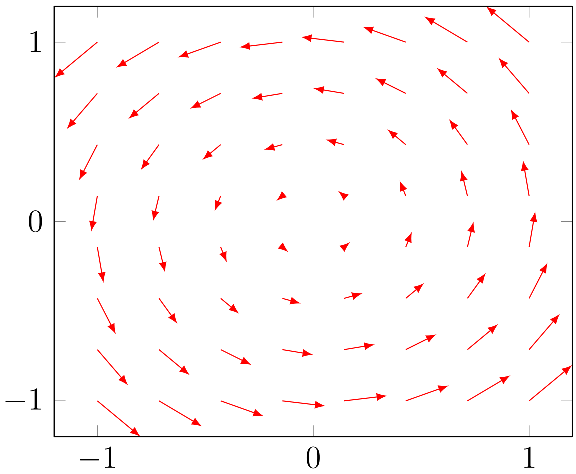
Also ist f ein Potential für X und X somit konservativ.



(b) Wir berechnen

$$f(x) = \int_0^1 X(tx)\cdot x\,dt = \int_0^1 \begin{pmatrix} -tx_2 \\ tx_1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\,dt = \int_0^1 (-tx_2x_1+tx_1x_2)\,dt = 0.$$

Somit gilt $\nabla f(x) = 0 \neq X(x)$. Also ist f kein Potential für X und X kann deshalb nicht konservativ sein.



(c) Wir berechnen

$$f(x) = \int_0^1 X(tx) \cdot x \, dt = \int_0^1 \begin{pmatrix} t^2 x_2 x_3 \\ t^2 x_3 x_1 \\ t^2 x_1 x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} dt = 3x_1 x_2 x_3 \int_0^1 t^2 \, dt = x_1 x_2 x_3.$$

Für den Gradienten finden wir

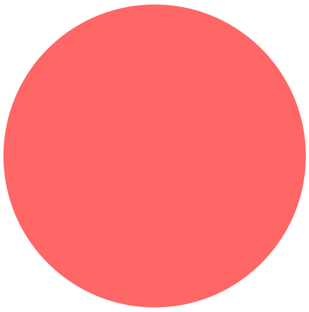
$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \partial_{x_1}(x_1 x_2 x_3) \\ \partial_{x_2}(x_1 x_2 x_3) \\ \partial_{x_3}(x_1 x_2 x_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 x_3 \\ x_1 x_3 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix} = X(x).$$

Also ist f ein Potential für X und X somit konservativ.

6.3. Einfacher Zusammenhang, Sternförmigkeit und Konvexität einer Teilmenge von $\mathbb{R}^n$.

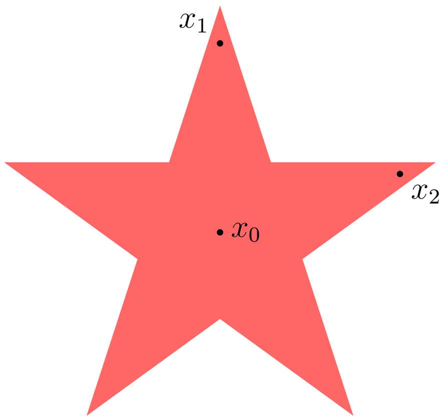
Zur Erinnerung: Eine Teilmenge $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ heisst konvex, falls für alle Punkte $x, y \in \Omega$ und für jedes $t \in [0,1]$ der Punkt $(1-t)x + ty$ in Ω enthalten ist. Hingegen heisst eine Teilmenge $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ sternförmig, falls es einen Punkt $x_0 \in \Omega$ gibt, sodass für jeden Punkt $x \in \Omega$ und für jedes $t \in [0,1]$ der Punkt $(1-t)x_0 + tx$ in Ω enthalten ist. Wir bemerken, dass die Menge $\{(1-t)x + ty \mid t \in [0,1]\}$ gerade die Verbindungsstrecke zwischen x und y ist. Das heisst, dass bei einer konvexen Menge Ω die Verbindungsstrecke zwischen allen Punkten $x, y \in \Omega$ in der Menge Ω enthalten ist. Hingegen gibt es in einer sternförmigen Menge Ω (mindestens) einen Punkt x_0, sodass die Verbindungsstrecke zwischen x_0 und jedem anderen Punkt $x \in \Omega$ in Ω enthalten ist.

(a) Die Kreisscheibe in $\mathbb{R}^2$ ist z.B. eine sternförmige Menge. Die Verbindungsstrecke zwischen dem Mittelpunkt und jedem anderen Punkt ist in der Kreisscheibe enthalten. Die Kreisscheibe ist sogar konvex, also die Verbindungsstrecke zwischen allen Punkten der Kreisscheibe ist in derselben enthalten.



(b) Sei $\Omega \in \mathbb{R}^n$ eine konvexe Menge. Wähle irgend ein Punkt $x_0 \in \Omega$. Dann ist wegen der Konvexität von Ω für jedes $x \in \Omega$ und für jedes $t \in [0,1]$ der Punkt $(1-t)x_0 + tx$ in Ω enthalten. Die konvexe Menge Ω ist also auch sternförmig.

(c) Wie der Name erwarten lässt, ist ein Stern sternförmig. Die unten abgebildete Menge in $\mathbb{R}^2$ ist sternförmig aber nicht konvex. Die Verbindungsstrecke zwischen dem Punkt x_0 und jedem anderen Punkt der Menge ist komplett in der Menge enthalten, wie einfach zu erkennen ist. Hingegen ist die Verbindungsstrecke zwischen den Punkten x_1 und x_2 nicht komplett in der Menge enthalten, also kann die Menge nicht konvex sein.



(d) Sei Ω eine sternförmige Menge und sei $x_0 \in \Omega$ ein Punkt, sodass $(1-t)x_0 + tx \in \Omega$ für alle $x \in \Omega$ und $t \in [0,1]$. Ersetzten wir t mit $1-t$ sehen wir, dass auch $(1-t)x + tx_0 \in \Omega$ für alle $x \in \Omega$ und $t \in [0,1]$. Sei weiter $\gamma : S^1 \to \Omega$ eine beliebige Schleife in Ω. Wir bezeichnen mit $\gamma_0 : S^1 \to \Omega$ die konstante Schleife $\gamma_0(y) = x_0$ für alle $y \in S^1$. Dank der Sternförmigkeit von Ω können wir γ zur konstanten Schleife γ_0 zusammenschrumpfen ohne die Menge Ω zu verlassen. Das heisst wir konstruieren eine Homotopie $h : [0,1] \times S^1 \to \Omega$ wie folgt:

$$h(t,y) = (1-t)\gamma(y) + tx_0.$$

Dann gilt für alle $y \in S^1$: $h(0,y) = \gamma(y)$ und $h(1,y) = x_0$ konstant. Desweiteren gilt $h(t,y) \in \Omega$ für alle $y \in S^1$ und $t \in [0,1]$, da Ω sternförmig ist. Offensichtlich ist h stetig, also haben wir eine Homotopie in Ω zwischen γ und der konstanten Schleife γ_0 konstruiert. Da γ beliebig war ist Ω einfach zusammenhängend (siehe Definition 3.36 (einfach zusammenhängend) im Skript von Dr. Ziltener).

(e) Intuitiv gibt es zu jeder Schleife $\gamma : S^1 \to \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ eine Gerade durch den Ursprung in $\mathbb{R}^3$, sodass kein Punkt im Bild von γ auf dieser Gerade liegt. Wir können dann einen Punkt $x_0 \neq 0$ (also nicht den Ursprung) auf dieser Gerade wählen und die Schleife γ wie in der vorherigen Teilaufgabe zu diesem Punkt zusammenschrumpfen, also

$$h : [0,1] \times S^1 \to \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}, \qquad h(t,y) = (1-t)\gamma(y) + tx_0.$$

Da für alle $y \in S^1$ der Punkt $\gamma(y)$ nicht auf der gewählten Gerade liegt, liegt auch der Punkt $(1-t)\gamma(y) + tx_0$ nicht auf der Gerade, ausser $t = 1$ in welchem Fall $h(1,y) = x_0 \neq 0$. Somit gilt in der Tat $h(t,y) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ für alle $y \in S^1$ und alle $t \in [0,1]$ (da der Ursprung in der Gerade enthalten ist und $h(t,y)$ nicht auf der Gerade liegen kann) und wir haben eine Homotopie zwischen γ und einer konstanten Schleife gefunden.

(f) Unser Beweis (mit Hilfe der Bemerkung nach der Aufgabenstellung) funktioniert ähnlich, aber etwas anders als der skizzierte Beweis in der vorherigen Teilaufgabe. Als Gerade wählen wir die z-Achse. Sei $\gamma : S^1 \to \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ eine beliebige Schleife. Falls die Schleife γ die z-Achse schneidet, verschieben wir die Schleife zuerst ein bisschen, damit das Bild von γ disjunkt von der z-Achse ist. Dies erfolt mit dem Hinweis in der Bemerkung. Nämlich verwenden wir ohne Begründung, dass es eine Homotopie gibt, also eine stetige Abbildung, $h_1 : [0,1] \times S^1 \to \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ mit

$$h_1(0,y) = \gamma(y), \quad \forall y \in S^1, \qquad \Big(h_1^1(1,y), h_1^2(1,y)\Big) \neq (0,0), \quad \forall y \in S^1,$$

wobei $h_1^1(1,y)$ und $h_1^2(1,y)$ die x- und y-Komponente des Vektors $h_1(1,y) \in \mathbb{R}^3$ sind. Somit ist h_1 eine Homotopie zwischen der ursprügnlichen Schleife $\gamma(y) = h_1(0,y)$ und einer Schleife $\gamma_1(y) := h_1(1,y)$, welche disjunkt von der z-Achse ist (die z-Achse besteht gerade aus den Punkten in $\mathbb{R}^3$ mit x- und y-Komponente gleich Null).

Nun wählen wir den Punkt $x_0 = (0,0,1)$ auf der z-Achse. Wir definieren eine Homotopie zwischen der Schleife γ_1 und der konstanten Schleife $\gamma_0(y) = x_0$ wie folgt:

$$h_2 : [0,1] \times S^1 \to \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}, \qquad h_2(t,y) = (1-t)\gamma_1(y) + tx_0$$

Oder in Komponenten geschrieben

$$\begin{pmatrix} h_2^1(t,y) \\ h_2^2(t,y) \\ h_2^3(t,y) \end{pmatrix} = (1-t) \begin{pmatrix} \gamma_1^1(y) \\ \gamma_1^2(y) \\ \gamma_1^3(y) \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-t)\gamma_1^1(y) \\ (1-t)\gamma_1^2(y) \\ (1-t)\gamma_1^3(y) + t \end{pmatrix}.$$

Da für alle $y \in S^1$ gilt

$$\begin{pmatrix} \gamma_1^1(y) \\ \gamma_1^2(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1^1(1,y) \\ h_1^2(1,y) \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

gilt auch

$$\begin{pmatrix} (1-t)\gamma_1^1(y) \\ (1-t)\gamma_1^2(y) \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \forall y \in S^1, \forall t \in [0,1).$$

Für $t = 1$ gilt $h(1,y) = x_0 \neq 0$ für alle $y \in S^1$. Somit haben wir $h_2(t,y) \neq 0 \in \mathbb{R}^3$ für alle $y \in S^1$ und $t \in [0,1]$. Wir haben also eine stetige Abbildung h_2 konstruiert mit Bild in $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.

Nun kann man die beiden Homotopien h_1 und h_2 noch zusammensetzen zu der gewünschten Homotopie h zwischen γ und der konstanten Schleife γ_0. Dazu definieren wir

$$h : [0,1] \times S^1 \to \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}, \qquad h(t,y) = \begin{cases} h_1(2t,y) & \text{für} \quad t \in [0, \frac{1}{2}] \\ h_2(2t-1,y) & \text{für} \quad t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Wir bemerken, dass das Bild von h tatsächlich in $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ enthalten ist, da h_1 und h_2 ihr Bild in $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ haben. Desweiteren sind h_1 und h_2 stetig und es gilt $h_1(1,y) = h_2(0,y)$ für alle $y \in S^1$, also ist auch h stetig. Schliesslich sehen wir, dass $h(0,y) = \gamma(y)$ und $h(1,y) = x_0$ für alle $y \in S^1$. h ist also die gewünschte Homotopie zwischen γ und einer konstanten Schleife und $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ ist somit einfach zusammenhängend.

6.4. Charakterisierung der Konservativität eines Vektorfeldes mittels partieller Ableitungen.

Jedes konservative Vektorfeld muss die Bedingung $D_i X^j = D_j X^i$ für alle i, j erfüllen. Diese Bedingung ist also notwendig für die Konservativität eines Vektorfeldes. Wir bemerken, dass die Vektorfelder in dieser Aufgabe alle auf $\mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{R}^3$ definiert sind. Da $\mathbb{R}^n$ für jedes n einfach zusammenhängend ist, ist in diesem Fall die Bedingung $D_i X^j = D_j X^i$ für alle i, j auch hinreichend um die Konservativität von X zu schliessen, siehe Satz 3.38 (Charakterisierung der Konservativität mittels partieller Ableitungen, Integrabilitätsbedingung). Achtung: Dies stimmt nicht für nicht-einfach zusammenhängende Gebiete. Man bemerke, dass der Fall $i = j$ trivial ist und nicht untersucht werden muss.

(a) Es gilt $X^1(x) = x_2$ und $X^2(x) = x_1$. Also

$$D_1 X^2(x) = 1 = D_2 X^1(x).$$

Da $\mathbb{R}^2$ einfach zusammenhängend ist, ist X somit konservativ. Dies haben wir in Aufgabe 6.2 bereits gesehen durch explizites Berechnen eines Potentials f für X.

(b) Es gilt $X^1(x) = -x_2$ und $X^2(x) = x_1$. Also

$$D_1 X^2(x) = 1 \neq -1 = D_2 X^1(x).$$

Somit ist X nicht konservativ. Dies haben wir in Aufgabe 6.2 bereits gesehen.

(c) Wir berechnen:

$$D_2 X^1(x) = D_1 X^2(x) = x_3, \quad D_3 X^1(x) = D_1 X^3(x) = x_2, \quad D_2 X^3(x) = D_3 X^2(x) = x_1.$$

Da $\mathbb{R}^3$ einfach zusammenhängend ist, ist X somit konservativ. Dies haben wir in Aufgabe 6.2 bereits gesehen durch explizites Berechnen eines Potentials f für X.

(d) Sei $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ ein fixer Vektor in $\mathbb{R}^3$. Das Kreuzprodukt ergibt

$$v \times x = \begin{pmatrix} v_2 x_3 - v_3 x_2 \\ v_3 x_1 - v_1 x_3 \\ v_1 x_2 - v_2 x_1 \end{pmatrix}.$$

Für das Vektorfeld $X(x) = v \times x$ gilt also

$$X^1(x) = v_2 x_3 - v_3 x_2, \quad X^2(x) = v_3 x_1 - v_1 x_3, \quad X^3(x) = v_1 x_2 - v_2 x_1.$$

Wir berechnen

$$\begin{aligned} &D_2 X^1(x) = -v_3, \quad D_3 X^1(x) = v_2, \quad D_3 X^2(x) = -v_1, \\ &D_1 X^2(x) = v_3, \quad D_1 X^3(x) = -v_2, \quad D_2 X^3(x) = v_1. \end{aligned}$$

Die Bedingung $D_i X^j(x) = D_j X^i(x)$ ist also nicht erfüllt und das Vektorfeld damit nicht konservativ.

6.5. Rotation eines Vektorfeldes.

Die Rotation ist definiert für Vektorfelder auf $\mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{R}^3$. Im Fall von $\mathbb{R}^2$ als skalare Funktion

$$\mathrm{rot} X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad \mathrm{rot} X(x) = D_1 X_2(x) - D_2 X^1(x),$$

und im Fall von $\mathbb{R}^3$ als Vektorfeld

$$\vec{\mathrm{rot}} X : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad \vec{\mathrm{rot}} X(x) = \begin{pmatrix} D_2 X^3(x) - D_3 X^2(x) \\ D_3 X^1(x) - D_1 X^3(x) \\ D_1 X^2(x) - D_2 X^1(x) \end{pmatrix}.$$

Wir bemerken, dass in beiden Fällen (auf $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$) die Rotation genau dann verschwindet, wenn $D_i X^j(x) = D_j X^i(x)$ für alle i, j. Somit kann für ein Vektorfeld auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet in $\mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{R}^3$ die Rotation verwendet werden, um das Vektorfeld auf Konservativität zu prüfen.

In Aufgabe 6.4 haben wir bereits alle relevanten partiellen Ableitungen berechnet und wir fügen sie hier nur zur Rotation zusammen:

(a) $\mathrm{rot}X(x) = 0.$

(b) $\mathrm{rot}X(x) = 2.$

(c) $\vec{\mathrm{rot}}X(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$

(d)

$$\vec{\mathrm{rot}}X(x) = \begin{pmatrix} D_2X^3(x) - D_3X^2(x) \\ D_3X^1(x) - D_1X^3(x) \\ D_1X^2(x) - D_2X^1(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2v_1 \\ 2v_2 \\ 2v_3 \end{pmatrix} = 2v.$$

6.6. Nicht-konservatives Vektorfeld mit verschwindender Rotation auf nicht-einfach zusammenhängendem Gebiet.

(a) Falls X konservativ wäre, dann müsste das Wegintegral $\int X \cdot d\gamma$ entlang jedem geschlossenen Weg γ verschwinden, siehe Satz 2.29 (Charakterisierung der Konservativität eines stetigen Vektorfeldes mittels Wegintegrale) in den Notizen von Dr. Ziltener. Wir berechnen das Wegintegral von X entlang dem folgenden Weg (also entlang dem Einheitskreis):

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}, \quad \text{mit} \quad \dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}.$$

Wir bemerken, dass für die Norm gilt

$$\|\gamma(t)\|^2 = \cos^2(t) + \sin^2(t) = 1,$$

also finden wir

$$X(\gamma(t)) = \frac{1}{\|\gamma(t)\|^2} \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$$

Das Wegintegral ergibt also

$$\begin{aligned} \int X \cdot d\gamma &= \int_0^{2\pi} X(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)\, dt = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^{2\pi} (\sin^2(t) + \cos^2(t))\, dt = \int_0^{2\pi} 1\, dt = 2\pi. \end{aligned}$$

Da das Wegintegral von X entlang des geschlossenen Wegs γ nicht Null ergibt, kann das Vektorfeld nicht konservativ sein.

(b) Wir berechnen $\mathrm{rot} X(x) = D_1 X^2(x) - D_2 X^1(x)$. Es gilt

$$X^1(x) = \frac{-x_2}{x_1^2 + x_2^2}, \quad X^2(x) = \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}.$$

Mit der Quotientenregel finden wir für $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_1} X^2(x) &= \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} = \frac{x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 x_1}{(x_1^2 + x_2^2)^2} = \frac{x_2^2 - x_1^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2}, \\
\frac{\partial}{\partial x_2} X^1(x) &= \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{-x_2}{x_1^2 + x_2^2} = \frac{-(x_1^2 + x_2^2) + 2x_2 x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} = \frac{x_2^2 - x_1^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2}.
\end{aligned}$$

Somit sehen wir, dass

$$\mathrm{rot} X(x) = 0.$$

(c) Das Vektorfeld ist nicht konservativ, obwohl die Rotation verschwinden. Dies ist kein Widerspruch, denn das Vektorfeld ist auf dem Gebiet $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ definiert und dieses Gebiet ist nicht einfach zusammenhängend. Insbesondere gibt es in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ keine Homotopie zwischen dem Weg γ in der ersten Teilaufgabe und einem konstanten Weg.