

### 7.1. Gemischte zweite Ableitungen.

Die Funktion  $f$  ist glatt auf ganz  $\mathbb{R}^2$ , also gilt insbesondere  $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ . Laut dem Satz von Schwarz, siehe z.B. Satz 7.5.1 im Skript von Prof. Struwe, stimmen somit die gemischten zweiten partiellen Ableitungen überein, also

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} f(x, y), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Wir dürfen also die Reihenfolge der partiellen Ableitungen vertauschen und berechnen den einfacheren Ausdruck  $\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} f$ . Da die Funktion  $f$  nämlich nicht von  $x$  abhängt, gilt

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = 0 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

und somit auch

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = 0, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

### 7.2. Taylor-Polynom.

(a) Wir berechnen zuerst die partiellen Ableitungen der Funktion  $f$  bis zur vierten Ordnung. Wir schreiben  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  und bemerken, dass für  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$  gilt

$$\partial_{x_j} \|x\|^2 = \partial_{x_j} \sum_{k=1}^n x_k^2 = 2x_j.$$

Mit der Kettenregel finden wir

$$\partial_{x_j} f(x) = \partial_{x_j} e^{\|x\|^2} = 2x_j e^{\|x\|^2}.$$

Die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung berechnen mittels Produkt- und Kettenregel und finden für  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$

$$\partial_{x_k} \partial_{x_j} f(x) = (2\delta_{jk} + 4x_j x_k) e^{\|x\|^2},$$

wobei  $\delta_{jk} = 1$  falls  $j = k$  und  $\delta_{jk} = 0$  falls  $j \neq k$  (dies kommt von  $\partial_{x_k} x_j = \delta_{jk}$ ). Die partiellen Ableitungen dritter Ordnung ergeben sich auf ähnlicher Weise:

$$\partial_{x_l} \partial_{x_k} \partial_{x_j} f(x) = (4\delta_{jl} x_k + 4\delta_{kl} x_j + 4\delta_{jk} x_l + 8x_j x_k x_l) e^{\|x\|^2},$$

wobei  $j, k, l \in \{1, 2, \dots, n\}$  beliebig. Für die partiellen Ableitungen vierter Ordnung könnte man jetzt bemerken, dass wir nur am Wert der Ableitungen an der Stelle 0 interessiert sind. Deshalb könnte man den letzten Term oben in der Berechnung

weglassen, da die Ableitung davon verschwindet wenn wir  $x = 0$  setzen. Wir schreiben nichtsdestotrotz die partiellen Ableitungen vierter Ordnung komplett auf, nämlich

$$\begin{aligned} \partial_{x_m} \partial_{x_l} \partial_{x_k} \partial_{x_j} f(x) = & \left( 4\delta_{jl}\delta_{km} + 4\delta_{kl}\delta_{jm} + 4\delta_{jk}\delta_{lm} + 8\delta_{jm}x_kx_l + 8\delta_{km}x_jx_l \right. \\ & \left. + 8\delta_{lm}x_jx_k + 8\delta_{jl}x_kx_m + 8\delta_{kl}x_jx_m + 8\delta_{jk}x_lx_m + 16x_jx_kx_lx_m \right) e^{\|x\|^2}, \end{aligned}$$

wobei  $j, k, l, m \in \{1, 2, \dots, n\}$  beliebig.

Setzen wir nun  $x = 0$ , also  $x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0$ , dann verschwindet jeder Term, der noch eine Komponente von  $x$  als Faktor beinhaltet. Ausserdem gilt  $e^{\|0\|} = e^0 = 1$ . Die partiellen Ableitungen bis zu vierter Ordnung an der Stelle  $x = 0$  sind also

$$\begin{aligned} f(0) &= 1, \\ \partial_{x_j} f(0) &= 0, \\ \partial_{x_k} \partial_{x_j} f(0) &= 2\delta_{jk}, \\ \partial_{x_l} \partial_{x_k} \partial_{x_j} f(0) &= 0, \\ \partial_{x_m} \partial_{x_l} \partial_{x_k} \partial_{x_j} f(0) &= 4\delta_{jl}\delta_{km} + 4\delta_{kl}\delta_{jm} + 4\delta_{jk}\delta_{lm} \end{aligned}$$

Da die ersten partiellen Ableitungen alle verschwinden, stimmen das Taylor-Polynom nullter und erster Ordnung im Punkt 0 überein:

$$T_0 f(x, 0) = T_1 f(x, 0) = f(0) = 1.$$

Weiter stimmen das Taylor-Polynom zweiter und dritter Ordnung im Punkt 0 überein, da alle partiellen Ableitungen dritter Ordnung dort verschwinden. Und zwar finden wir

$$T_2 f(x, 0) = T_3 f(x, 0) = f(0) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \partial_{x_k} \partial_{x_j} f(0) x_j x_k = 1 + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \delta_{jk} x_j x_k = 1 + \sum_{j=1}^n x_j^2,$$

wobei wir bemerkt haben, dass bei der Summe über  $k$  alle Terme verschwinden ausser der Term mit  $k = j$ . Schliesslich berechnen wir das Taylor-Polynom vierter Ordnung:

$$\begin{aligned} T_4 f(x, 0) &= f(0) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \partial_{x_k} \partial_{x_j} f(0) x_j x_k + \frac{1}{4!} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n \partial_{x_m} \partial_{x_l} \partial_{x_k} \partial_{x_j} f(0) x_j x_k x_l x_m \\ &= 1 + \sum_{j=1}^n x_j^2 + \frac{1}{6} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n (\delta_{jl}\delta_{km} + \delta_{kl}\delta_{jm} + \delta_{jk}\delta_{lm}) x_j x_k x_l x_m \\ &= 1 + \sum_{j=1}^n x_j^2 + \frac{1}{6} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n (\delta_{jl} x_j x_k^2 x_l + \delta_{kl} x_j^2 x_k x_l + \delta_{jk} x_j x_k x_l^2) \\ &= 1 + \sum_{j=1}^n x_j^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n x_j^2 x_k^2, \end{aligned}$$

wobei wir am Schluss bemerkt haben, dass alle drei Terme dasselbe Resultat ergeben, nämlich  $\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n x_j^2 x_k^2 = (\sum_{j=1}^n x_j^2)^2$ .

(b) Wir verwenden für diese Aufgabe die Taylor-Formel bis zu dritter Ordnung um den Punkt  $p = 0$ . Wir bemerken zuerst, dass  $f$  glatt ist auf  $\mathbb{R}^n$ , also insbesondere  $f \in C^3(\mathbb{R}^n)$ . Laut der Taylor-Formel, siehe z.B. Satz 7.5.2 im Skript von Prof. Struwe, gibt es also zu jedem  $x \in \mathbb{R}^n$  ein  $y_x \in \mathbb{R}^n$  mit  $\|y_x\| \leq \|x\|$ , sodass gilt

$$f(x) = f(0) + \sum_{j=1}^n \partial_{x_j} f(0) x_j + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n \partial_{x_j} \partial_{x_k} f(0) x_j x_k + \frac{1}{3!} \sum_{j,k,l=1}^n \partial_{x_j} \partial_{x_k} \partial_{x_l} f(y_x) x_j x_k x_l.$$

(Die Notation  $y_x$  dient um daran zu erinnern, dass der Punkt  $y_x$  von  $x$  abhängt). Wir können diese Taylor-Formel auch umschreiben zu

$$f(x) - T_2 f(x, 0) = \frac{1}{3!} \sum_{j,k,l=1}^n \partial_{x_j} \partial_{x_k} \partial_{x_l} f(y_x) x_j x_k x_l.$$

In der vorherigen Teilaufgabe haben wir das Taylor-Polynom zweiten Grades um den Punkt 0 gefunden, nämlich

$$T_2 f(x, 0) = 1 + \sum_{j=1}^n x_j^2 = 1 + \|x\|^2.$$

Nehmen wir also den Absolutwert der Formel oben, so finden wir

$$\left| f(x) - 1 - \|x\|^2 \right| = \frac{1}{6} \left| \sum_{j,k,l=1}^n \partial_{x_j} \partial_{x_k} \partial_{x_l} f(y_x) x_j x_k x_l \right| \leq \frac{1}{6} \sum_{j,k,l=1}^n \left| \partial_{x_j} \partial_{x_k} \partial_{x_l} f(y_x) \right| |x_j x_k x_l|.$$

Wir bemerken, dass für jedes  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$  gilt  $x_j \leq \|x\| = \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2}$ , also gilt auch

$$|x_j x_k x_l| = |x_j| |x_k| |x_l| \leq \|x\|^3$$

für alle  $j, k, l \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Wir haben also

$$\left| f(x) - 1 - \|x\|^2 \right| \leq \frac{1}{6} \sum_{j,k,l=1}^n \left| \partial_{x_j} \partial_{x_k} \partial_{x_l} f(y_x) \right| \|x\|^3,$$

und es bleibt noch zu zeigen, dass für alle  $j, k, l$  und alle  $x \in \overline{B}_1^n(0)$  die Funktion  $\partial_{x_j} \partial_{x_k} \partial_{x_l} f(y_x)$  beschränkt ist. Dazu bemerken wir zuerst, dass laut der Taylor-Formel gilt  $\|y_x\| \leq \|x\|$ . Somit ist für  $x \in \overline{B}_1^n(0)$  auch  $y_x \in \overline{B}_1^n(0)$ . Weiter ist  $f \in C^3(\mathbb{R}^n)$  also sind die partiellen Ableitungen dritter Ordnung von  $f$  stetige Funktionen auf  $\mathbb{R}^n$ . Eine stetige Funktion auf der kompakten Menge  $\overline{B}_1^n(0)$  besitzt ein Maximum. Insbesondere besitzt für alle  $j, k, l$  die Funktion  $\partial_{x_j} \partial_{x_k} \partial_{x_l} f$  ein Maximum auf  $\overline{B}_1^n(0)$ . Somit existiert ein  $C \in [0, \infty)$ , sodass

$$\frac{1}{6} \sum_{j,k,l=1}^n \left| \partial_{x_j} \partial_{x_k} \partial_{x_l} f(y_x) \right| \leq C, \quad \forall x \in \overline{B}_1^n(0).$$

Eingesetzt in die Abschätzung oben folgt das gewünschte Resultat.

**7.3. Kritischer Punkt, Hesse-Matrix, striktes lokales Minimum/Maximum, Sattelpunkt.**

Wir berechnen jeweils zuerst den Gradienten

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} \partial_x f(x, y) \\ \partial_y f(x, y) \end{pmatrix}$$

und die Hesse-Matrix

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} \partial_x^2 f(x, y) & \partial_y \partial_x f(x, y) \\ \partial_x \partial_y f(x, y) & \partial_y^2 f(x, y) \end{pmatrix}$$

der Funktion  $f$  im Punkt  $(x, y)$ . Die kritischen Punkte lassen sich durch lösen der Gleichung  $\nabla f(x, y) = 0$  bestimmen. Wir setzen dann jeden kritischen Punkt in die (Matrix-wertige) Funktion  $H_f(x, y)$  ein, um die Hesse-Matrix im kritischen Punkt zu studieren.

(Wir bemerken übrigens, dass alle Funktionen in der Aufgabenstellung glatt sind, also gilt laut dem Satz von Schwarz  $\partial_y \partial_x f = \partial_x \partial_y f$ . Das heisst die Hesse-Matrix ist symmetrisch und wir müssen nur einer der beiden nebendiagonalen Einträgen berechnen.)

$$\text{(a) } \nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 - 1 \\ y^2 - 1 \end{pmatrix}, \quad H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 2y \end{pmatrix}$$

Kritische Punkte:  $\nabla f(x, y) = 0$  bedeutet  $x^2 - 1 = 0$  und  $y^2 - 1 = 0$ . Jede der Gleichungen hat zwei Lösungen  $x = \pm 1$  und  $y = \pm 1$ . Das heisst es gibt insgesamt vier kritische Punkte:

$$p_1 = (1, 1), \quad p_2 = (1, -1), \quad p_3 = (-1, 1), \quad p_4 = (-1, -1).$$

Für die Hesse-Matrix in diesen Punkten finden wir

$$H_f(p_1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad H_f(p_2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad H_f(p_3) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad H_f(p_4) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Im Punkt  $p_1$  ist die Hesse-Matrix positiv definit, also ist der kritische Punkt  $p_1$  eine lokale Minimalstelle von  $f$ . Im Punkt  $p_4$  ist die Hesse-Matrix negativ definit, also ist  $p_4$  eine lokale Minimalstelle von  $f$ . In den Punkten  $p_2$  und  $p_3$  ist die Hesse-Matrix jeweils indefinit, also besitzt sowohl positive als auch negative Eigenwerte, somit handelt es sich bei  $p_2$  und  $p_3$  um Sattelpunkte von  $f$ .

$$(b) \quad \nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x + y \\ x + 2y \end{pmatrix}, \quad H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Kritische Punkte:  $\nabla f(x, y) = 0$  ist äquivalent zum Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x + y &= 0, \\ x + 2y &= 0. \end{aligned}$$

Dieses lineare Gleichungssystem besitzt genau eine Lösung, nämlich

$$p = (0, 0).$$

Die Hesse-Matrix in  $p$  ist oben gegeben (die Hesse-Matrix ist konstant auf ganz  $\mathbb{R}^2$ ). Um den kritischen Punkt zu klassifizieren müssen wir die Eigenwerte der Hesse-Matrix bestimmen. Das charakteristische Polynom ist

$$\det(H_f(p) - \lambda \text{id}) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ 1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 3)(\lambda - 1).$$

Die Eigenwerte der Hesse-Matrix sind also 3 und 1. Somit ist die Hesse-Matrix positiv definit und der Punkt  $p$  ist eine lokale Minimalstelle von  $f$ .

$$(c) \quad \nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}, \quad H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Kritische Punkte:  $\nabla f(x, y) = 0$  hat genau die Lösung

$$p = (0, 0).$$

Die Hesse-Matrix in  $p$  ist oben gegeben. Wir berechnen ihre Eigenwerte:

$$\det(H_f(p) - \lambda \text{id}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = (\lambda + 1)(\lambda - 1).$$

Die Eigenwerte der Hesse-Matrix sind also 1 und  $-1$ . Somit ist die Hesse-Matrix indefinit und der Punkt  $p$  ist ein Sattelpunkt.

$$(d) \quad \nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2xe^{x^2+y^2} \\ 2ye^{x^2+y^2} \end{pmatrix}, \quad H_f(x, y) = \begin{pmatrix} (2 + 4x^2)e^{x^2+y^2} & 4xye^{x^2+y^2} \\ 4xye^{x^2+y^2} & (2 + 4y^2)e^{x^2+y^2} \end{pmatrix}$$

Kritische Punkte:  $\nabla f(x, y) = 0$  ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} 2xe^{x^2+y^2} &= 0 \\ 2ye^{x^2+y^2} &= 0. \end{aligned}$$

Da  $e^{x^2+y^2} > 0$  für alle  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , hat dieses Gleichungssystem genau die Lösung

$$p = (0, 0).$$

Eingesetzt in  $H_f(x, y)$  finden wir als Hesse-Matrix im Punkt  $p$ :

$$H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Dies ist eine positiv definite Matrix, also handelt es sich bei  $p$  um eine lokale Minimalstelle.

$$(e) \quad \nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 4y^3 \end{pmatrix}, \quad H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12y^2 \end{pmatrix}$$

Kritische Punkte:  $\nabla f(x, y) = 0$  hat genau die Lösung

$$p = (0, 0).$$

Die Hesse-Matrix im Punkt  $p$  ist

$$H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix ist nicht positiv definit, sondern nur positiv semidefinit. Also einer der Eigenwerte ist Null, während der andere positiv ist. Die Klassifizierung des kritischen Punktes anhand der Hesse-Matrix ist hier uneindeutig. Es könnte sich beim Punkt  $p$  also sowohl um eine lokale Minimalstelle als auch um einen Sattelpunkt handeln. Um den kritischen Punkt zu klassifizieren könnte man nun weitere Ableitungen anschauen. Jedoch bemerken wir auch sofort, dass

$$f(x, y) = x^2 + y^4 > 0, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\},$$

während  $f(0, 0) = 0$ . Somit ist der Punkt  $(0, 0)$  offensichtlich eine lokale Minimalstelle.

$$(f) \quad \nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \\ -4y^3 \end{pmatrix}, \quad H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -12y^2 \end{pmatrix}$$

Kritische Punkte:  $\nabla f(x, y) = 0$  hat genau die Lösung

$$p = (0, 0).$$

Die Hesse-Matrix im Punkt  $p$  ist

$$H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Auch hier ist die Klassifizierung des kritischen Punktes anhand der Hesse-Matrix uneindeutig. Wieder könnte es sich sowohl um eine lokale Minimalstelle oder ein Sattelpunkt handeln. Wir haben wieder  $f(0,0) = 0$ , aber diesmal gilt

$$f(x,0) = x^2 > 0, \quad f(0,y) = -y^4 < 0, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}.$$

Somit handelt es sich bei  $(0,0)$  um einen Sattelpunkt von  $f$  (es gibt sowohl Richtungen entlang denen  $f$  zunimmt und Richtungen entlang denen  $f$  abnimmt).