10.1. Immersion, Einbettung

(a) Wir bemerken, dass f glatt ist. Die Ableitung von f in einem Punkt $y \in \mathbb{R}$ lautet

$$df(y) = \begin{pmatrix} -\sin(y) \\ \cos(y) \end{pmatrix}.$$

Da der Sinus und Cosinus nie gleichzeitig verschwinden, also für alle $y \in \mathbb{R}$ gilt $\sin(y) \neq 0$ oder $\cos(y) \neq 0$, ist die lineare Abbildung $df(y) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ für jedes $y \in \mathbb{R}$ injektiv. Somit ist f eine (glatte) Immersion.

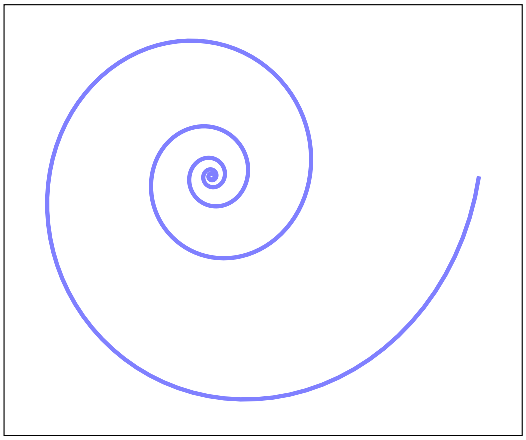
(b) Die Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ ist keine Einbettung, da f nicht injektiv ist. Es gilt nämlich für jedes $y \in \mathbb{R}$: $f(y) = f(y + 2\pi)$.

(c) Zum Beispiel ist die Einschränkung von f auf $I = (0, 2\pi)$ eine (glatte) Einbettung. Die Abbildung $f|_I : (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$ ist natürlich immernoch eine Immersion und ist nun injektiv. Tatsächlich, falls $f(y_1) = f(y_2)$ für $y_1, y_2 \in (0, 2\pi)$, dann gilt $\cos(y_1) = \cos(y_2)$ und $\sin(y_1) = \sin(y_2)$. Aus der ersten Gleichung folgt $y_1 = y_2$ oder $y_1 = 2\pi - y_2$ und aus der zweiten Gleichung folgt dann $y_1 = y_2$. Die Umkehrabbildung auf dem Bild von $f|_I$, können wir z.B. schreiben als

$$f|_I^{-1} : f(I) \to (0, 2\pi), \quad f|_I^{-1}(x, y) = \begin{cases} \arccos(x) & \text{für} \quad y \geq 0, \\ 2\pi - \arccos(x) & \text{für} \quad y \leq 0. \end{cases}$$

Der Arcuscosinus ist stetig auf $(-1, 1)$. Der einzige Punkt in $f(I)$ mit $y = 0$ ist $(-1, 0)$. Da $\arccos(-1) = 2\pi - \arccos(-1) = \pi$, stimmen die beiden Fälle dort überein, also ist $f|_I^{-1}$ stetig und $f|_I$ somit eine Einbettung. Übrigens ist die Einschränkung von f auf jedes offene Interval $I \subseteq \mathbb{R}$ der Länge $|I| \leq 2\pi$ eine Einbettung.

10.2. Tangentialräume an die logarithmische Spirale, Tangentialabbildung



(a)

(b) Die Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^2$ ist hier als Parametrisierung gegeben. Betrachten wir die Abbildung

$$\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad \psi(t) = e^t(\cos(t), \sin(t)),$$

so ist M das Bild von ψ, also $M = \psi(\mathbb{R})$. Um zu zeigen, dass M eine Untermannigfaltigkeit ist, verwenden wir Satz 4.23 ("Einbettungssatz") in den Notizen von Dr. Ziltener. Wir zeigen, dass ψ eine glatte Einbettung ist. Aus dem Einbettungssatz folgt dann, dass $M = \psi(\mathbb{R})$ eine glatte Untermannigfaltigkeit der Dimension 1 ist.

ψ ist offensichtlich glatt. Die Ableitung in einem Punkt $t \in \mathbb{R}$ lautet

$$d\psi(t) = e^t \begin{pmatrix} \cos(t) - \sin(t) \\ \cos(t) + \sin(t) \end{pmatrix}.$$

Dies ist eine injektive lineare Abbildung von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}^2$ ausser

$$\cos(t) - \sin(t) = 0, \quad \cos(t) + \sin(t) = 0,$$

also $\cos(t) = \sin(t) = 0$, was unmöglich ist. Somit ist $d\psi(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ injektiv, also ψ eine Immersion. Des Weiteren ist ψ selbst injektiv. Tatsächlich impliziert $(x, y) = \psi(t) = \psi(s)$, dass $x^2 + y^2 = e^{2t} = e^{2s}$, also $t = s$. Die Umkehrabbildung ist gegeben durch

$$\varphi : M \to \mathbb{R}, \quad \varphi(x, y) = \frac{1}{2}\log(x^2 + y^2),$$

was stetig auf M ist, da $(0, 0) \notin M$. Somit ist $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ eine glatte Einbettung.

Laut dem zweiten Teil von Satz 5.4 (Charakterisierung des Tangentialraumes) in den Notizen von Dr. Ziltener ist der Tangentialraum im Punkt $\psi(t) \in M$ gegeben durch

$$T_{\psi(t)} = \operatorname{im}(d\psi(t)) = \Big\{ s \begin{pmatrix} \cos(t) - \sin(t) \\ \cos(t) + \sin(t) \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R} \Big\}.$$

Dies ist übrigens genau die Gerade welche von einer Rotation um 45 Grad im Gegenuhrzeigersinn des Vektors $\psi(t)$ aufgespannt wird.

(c) Eine Rotation um den Winkel a im Gegenuhrzeigersinn bildet $e^t(\cos(t), \sin(t))$ auf $e^t(\cos(t + a), \sin(t + a))$ ab. Dies folgt aus geometrischen Überlegungen oder aus der Matrix-Darstellung der Rotation

$$R_a = \begin{pmatrix} \cos(a) & -\sin(a) \\ \sin(a) & \cos(a) \end{pmatrix}$$

zusammen mit den Additionsformeln für Sinus und Cosinus. Multiplzieren wir noch mit dem Skalar e^a, so finden wir für die Abbildung $f : M \to \mathbb{R}^2$:

$$f\Big(e^t(\cos(t), \sin(t))\Big) = e^{t+a}(\cos(t + a), \sin(t + a)).$$

Offensichtlich liegt das Bild von f wieder in M, also $f(M) \subseteq M$. Des Weiteren ist f sogar eine Bijektion von M nach M. Die Umkehrabbildung ist gegeben durch

$$f^{-1} : M \to M, \quad f^{-1}(x) = e^{-a} R_{-a}.$$

Es gilt also sogar $f(M) = M$.

(d) Eine Fortsetzung der Abbildung $f : M \to \mathbb{R}^2$ ist gegeben durch

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad F(x) = e^a R_a x.$$

Wir bemerken, dass dies eine lineare Abbildung ist. Somit gilt $dF(x) \cdot v = F \cdot v$. Dies kann man auch aus der Koordinaten-Darstellung von F erkennen:

$$F(x_1, x_2) = e^a \begin{pmatrix} \cos(a)x_1 - \sin(a)x_2 \\ \sin(a)x_1 + \cos(a)x_2 \end{pmatrix}.$$

Die Ableitung lautet in Matrix-Darstellung

$$dF(x) = e^a \begin{pmatrix} \cos(a) & -\sin(a) \\ \sin(a) & \cos(a) \end{pmatrix}.$$

Die Tangentialabbildung $df(x) : T_x M \to T_{f(x)} M$ für $x \in M$ ist die Einschränkung dieser Ableitung auf den Tangentialraum im Punkt x, also

$$df(x) = dF(x)|_{T_x M} = e^a R_a|_{T_x M}.$$

Die Tangentialabbildung nimmt also ein Tangentialvektor in $T_x M$, rotiert ihn um den Winkel a im Gegenuhrzeigersinn und streckt ihn um den Faktor e^a. Es gilt übrigens

$$R_a \begin{pmatrix} \cos(t) - \sin(t) \\ \cos(t) + \sin(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t+a) - \sin(t+a) \\ \cos(t+a) + \sin(t+a) \end{pmatrix},$$

wie aus den Additionsformeln für Cosinus und Sinus folgt. Somit finden wir für $x = \psi(t) \in M$ und $s \in \mathbb{R}$:

$$df(\psi(t)) \cdot s \begin{pmatrix} \cos(t) - \sin(t) \\ \cos(t) + \sin(t) \end{pmatrix} = e^a s \begin{pmatrix} \cos(t+a) - \sin(t+a) \\ \cos(t+a) + \sin(t+a) \end{pmatrix}$$

(e) Seien x_0, x_0' zwei Punkte in M. Die Tangentialräume in x_0 und x_0' sind beides Geraden durch den Ursprung in $\mathbb{R}^2$. Dabei ist der Tangentialraum in x_0' eine Rotation des Tangentialraums in x_0 um den Winkel zwischen x_0' und x_0. Die Abbildung $df(x_0)$ vollzieht diese Rotation und streckt zusätzlich noch die Tangentialvektoren. Liegen x_0 und x_0' beide auf dem Strahl $(0, \infty) \times \{0\}$ (dies entspricht $t = 2\pi n$ für ein $n \in \mathbb{N}$), so sind die Tangentialräume in x_0 und x_0' gleich und die Abbildung $df(x_0)$ ist eine reine Streckung.

10.3. Tangentialabbildung der stereographischen Projektion

Die stereographische Projektion ist die Folgende Abbildung

$$\varphi : S^{n-1} \setminus \{(0, \ldots, 0, 1)\} \to \mathbb{R}^{n-1}, \quad \varphi(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{1 - x_n}(x_1, \ldots, x_{n-1}). \tag{1}$$

Diese Formel kann man herleiten in dem man die inverse stereographische Projektion aus Serie 9 invertiert. Wir leiten die Formel vollständigkeitshalber aus geometrischen Überlegunen her. Das Bild von $x \in S^{n-1} \setminus \{(0, \ldots, 0, 1)\}$ unter φ ist der Punkt wo die Gerade durch $(0, \ldots, 0, 1)$ und x die Ebene $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ schneidet. Diese Gerade ist gegeben durch

$$\Big\{(tx_1, \ldots, tx_{n-1}, 1 + t(x_n - 1)) \,|\, t \in \mathbb{R}\Big\}.$$

Wir suchen also $t \in \mathbb{R}$ und $y \in \mathbb{R}^{n-1}$ (für gegebenes x), sodass

$$(tx_1, \ldots, tx_{n-1}, 1 + t(x_n - 1)) = (y_1, \ldots, y_{n-1}, 0).$$

Die Lösung der n-ten Gleichung ist gegeben durch $t = (1 - x_n)^{-1}$ und aus den restlichen Gleichungen folgt dann

$$y = \frac{1}{1 - x_n}(x_1, \ldots, x_{n-1}).$$

Der Tangentialraum in einem Punkt $x \in S^{n-1}$ ist gegeben durch

$$T_x S^{n-1} = \{v \in \mathbb{R}^n \,|\, \langle x, v\rangle = 0\},$$

also die Vektoren in $\mathbb{R}^n$, die orthogonal zu x sind. Der Tangentialraum in $\varphi(x) \in \mathbb{R}^{n-1}$ ist einfach $\mathbb{R}^{n-1}$. Die Formel in (1) gibt eine Fortsetzung Φ von φ auf eine offene Umgebung von $S^{n-1} \setminus \{(0, \ldots, 0, 1)\}$, nämlich $\mathbb{R}^n \setminus \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, x_n = 1\}$. Die Ableitung von Φ lässt sich aus (1) berechnen. Sie bildet ein Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ auf den folgenden Vektor ab

$$d\Phi(x) \cdot v = \frac{1}{1 - x_n} \begin{pmatrix} v_1 + \frac{x_1}{1-x_n} v_n \\ v_2 + \frac{x_2}{1-x_n} v_2 \\ \vdots \\ v_{n-1} + \frac{x_{n-1}}{1-x_n} v_n \end{pmatrix}.$$

Die Tangentialabbildung von φ in einem Punkt $x \in S^{n-1} \setminus \{(0, \ldots, 0, 1)\}$ ist die Einschränkung von $d\Phi(x)$ auf $T_x M = \{v \in \mathbb{R}^n \,|\, \langle x, v\rangle = 0\}$, also

$$d\varphi(x) : T_x M \to \mathbb{R}^{n-1}, \quad d\varphi(x) = d\Phi(x)|_{T_x M}.$$

10.4. Extrema

(a) Wir bemerken, dass f stetig ist (sogar glatt). Wir schreiben $M = g^{-1}(0)$, wobei $g(x_1, x_2) = x_1^4 + x_2^4 - 1$. Da g stetig ist, ist das Urbild von $\{0\}$ abgeschlossen. Des Weiteren ist die Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^2$ beschränkt. Somit ist M eine kompakte Menge. Jede stetige Funktion nimmt auf einer kompakten Menge seine Extrema an, also nimmt f auf M sein Maximum und sein Minimum an.

(b) Kandidaten für das Maximum und Minimum sind die kritischen Punkte von f auf M. Um diese zu finden, verwenden wir die Lagrange-Multiplikatorenregel, siehe z.B. Satz 5.19 (Lagrange-Multiplikatorenregel) in den Notizen von Dr. Ziltener. Dazu führen wir den Lagrange-Multiplikator $\lambda \in \mathbb{R}$ ein und betrachten die Fortsetzung

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad F(x_1, x_2) = x_1 + x_2,$$

von f auf $\mathbb{R}^2$. Die kritischen Punkte von f auf M sind gegeben durch die kritischen Punkte der Lagrange-Funktion:

$$L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad L(x_1, x_2, \lambda) = F(x_1, x_2) - \lambda g(x_1, x_2) = x_1 + x_2 - \lambda(x_1^4 + x_2^4 - 1),$$

wobei wir λ als Variable betrachten. Die kritischen Punkte einer Funktion auf $\mathbb{R}^3$ sind gegeben durch das verschwinden der Ableitung. Die Ableitung von L lautet

$$dL(x, \lambda) = \begin{pmatrix} 1 - 4\lambda x_1^3 & 1 - 4\lambda x_2^3 & x_1^4 + x_2^4 - 1 \end{pmatrix}.$$

Wir müssen also das folgende Gleichungssystem lösen:

$$\begin{aligned} 1 - 4\lambda x_1^3 &= 0, \\ 1 - 4\lambda x_2^3 &= 0, \\ x_1^4 + x_2^4 - 1 &= 0. \end{aligned}$$

Aus den ersten beiden Gleichungen folgt

$$x_1 = \sqrt[3]{\frac{1}{4\lambda}}, \quad x_2 = \sqrt[3]{\frac{1}{4\lambda}}.$$

Setzen wir dies in die dritte Gleichung ein, finden wir

$$2\left(\frac{1}{4\lambda}\right)^{\frac{4}{3}} = 1,$$

was die folgenden zwei reellen Lösungen für λ ergibt

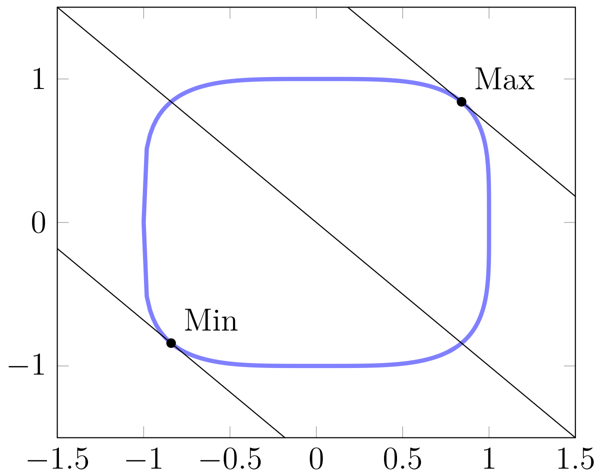
$$\lambda = \frac{2^{\frac{3}{4}}}{4}, \quad \text{oder} \quad \lambda = -\frac{2^{\frac{3}{4}}}{4}.$$

Die kritischen Punkte von f auf M sind also gegeben durch

$$\left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right) \quad \left(-\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, -\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right).$$

Setzen wir dies in die Funktion f ein, so sehen wir das $(\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, \frac{1}{\sqrt[4]{2}})$ das Maximum von f auf M ist und $(-\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, -\frac{1}{\sqrt[4]{2}})$ das Minimum von f auf M ist.

(c) Wir sehen, dass die kritischen Punkte dort sind, wo die Niveaumengen von f tangential zu M liegen. In diesen Punkten ist der Gradient ∇F der Erweiterung F orthogonal zum Tangentialraum an M. Somit verschwindet in diesen Punkten die Tangentialabbildung df.



(d) Wieder ist die Funktion f stetig auf der kompakten Menge M, also nimmt sie ihre Extremwerte an.

(e) Wir verwenden wieder die Lagrange-Multiplikatorenregel. Offensichtlich ist eine Fortsetzung von f auf ganz $\mathbb{R}^2$ durch $F(x) = \|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2$ gegeben. Die Lagrange-Funktion ist also

$$L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad L(x_1, x_2, \lambda) = F(x_1, x_2) - \lambda g(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - \lambda(x_1^4 + x_2^4 - 1).$$

Die Ableitung ergibt

$$dL(x, \lambda) = \begin{pmatrix} 2x_1 - 4\lambda x_1^3 & 2x_2 - 4\lambda x_2^3 & x_1^4 + x_2^4 - 1 \end{pmatrix}.$$

Wir müssen also das folgende Gleichungssystem lösen:

$$\begin{aligned} x_1 - 2\lambda x_1^3 &= 0, \\ x_2 - 2\lambda x_2^3 &= 0, \\ x_1^4 + x_2^4 &= 1. \end{aligned}$$

Aus der ersten Gleichung folgt, dass entweder $x_1 = 0$ oder $x_1^2 = \frac{1}{2\lambda}$ gilt. Falls $x_1 = 0$, folgt aus der dritten Gleichung: $x_2 = \pm 1$. Dies ergibt die beiden kritischen Punkte:

$$(0,1), \quad (0,-1). \tag{2}$$

(Mit $\lambda = \frac{1}{2}$ ist auch die zweite Gleichung erfüllt.) Aus der zweiten Gleichung folgt ähnlich, dass $x_2 = 0$ oder $x_2^2 = \frac{1}{2\lambda}$. Der erste Fall ergibt die kritischen Punkte

$$(1,0), \quad (-1,0). \tag{3}$$

Schliesslich müssen wir noch den Fall

$$x_1^2 = x_2^2 = \frac{1}{2\lambda}$$

betrachten. Eingesetzt in die dritte Gleichung, finden wir $\frac{1}{2\lambda^2} = 1$, also $\lambda = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Da x_1^2, x_2^2 positiv sind, müssen wir das Plus-Zeichen wählen, also

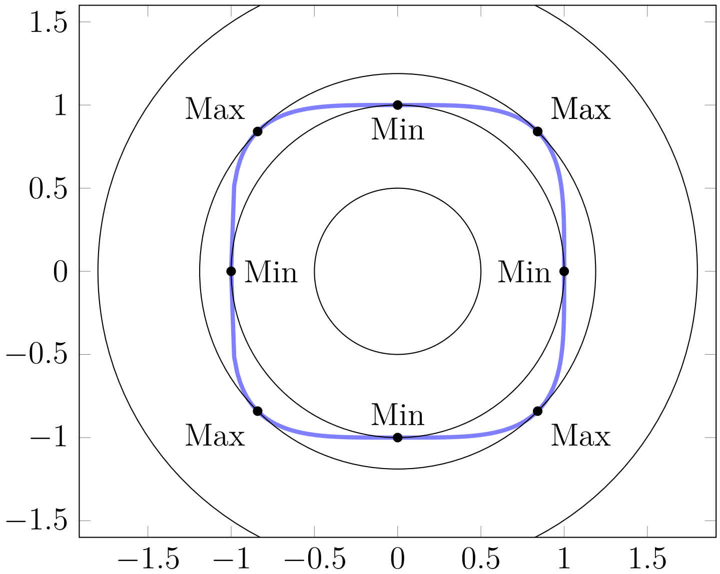
$$x_1^2 = x_2^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Hier können wir für x_1 und x_2 je die positive oder die negative Wurzel wählen, also finden wir die vier kritischen Punkte:

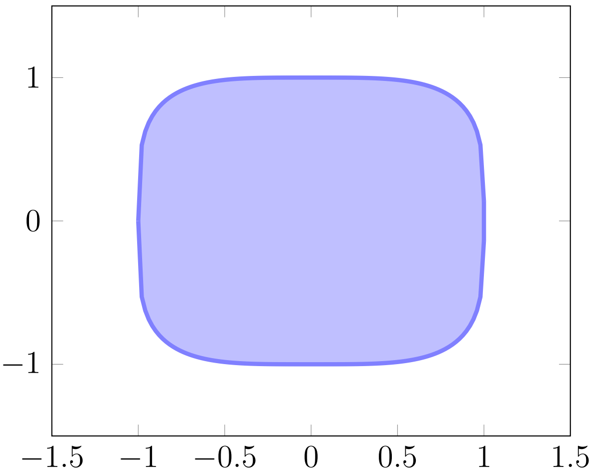
$$\Big(\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\Big), \quad \Big(\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, -\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\Big), \quad \Big(-\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\Big), \quad \Big(-\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, -\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\Big). \tag{4}$$

Die Funktion f hat also insgesamt acht kritische Punkte auf M. In den ersten vier, also (2) und (3), nimmt f den Wert 1 an, es handelt sich um vier verschiedene Minima. In den zweiten vier, also (4), nimmt f den Wert $\sqrt{2}$ an, es handelt sich um vier verschiedene Maxima.

(f) Wieder befinden sich die kritischen Punkte dort, wo die Niveaumengen von f tangential zu M liegen:



(g) K ist die ausgefüllte Fläche, inklusive Rand.



(h) Wieder ist K beschränkt und abgeschlossen. Somit nimmt die stetige Funktion f seine Extremwerte auf K an.

(i) Wir definieren

$$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad h(x_1, x_2) = x_1^4 + x_2^4.$$

Diese Funktion ist als Polynom stetig auf $\mathbb{R}^2$. Die Menge U ist das Urbild unter h von $(-\infty, 1)$:

$$U = h^{-1}((-\infty, 1)).$$

Das Urbild einer offenen Menge unter einer stetigen Abbildung ist wieder offen. Da $(-\infty, 1) \subseteq \mathbb{R}$ offen ist und h stetig, ist also U offen.

(j) Die kritischen Punkte von f auf der offenen Menge $U \subseteq \mathbb{R}^2$ sind einfach die Punkte in U, wo die Ableitung df verschwindet. Die Ableitung ist

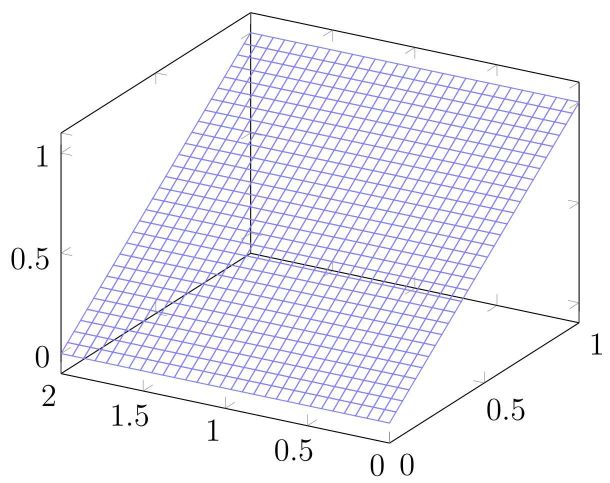
$$df(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 \end{pmatrix}.$$

Dies verschwindet genau im Punkt $(0,0)$. Da dieser Punkt in U liegt, ist $(0,0)$ ein kritischer Punkt von f auf U.

(k) Wir bemerken, dass U genau das Innere der abgeschlossenen Menge K ist, und die Untermannigfaltigkeit M ist gerade der Rand von K. Falls ein Extremum von f auf K im Inneren von K angenommen wird, so muss es ein kritischer Punkt von f auf U sein. Laut der vorherigen Teilaufgabe kommt also der Punkt $(0,0)$ als Extremum in Frage. Falls hingegen ein Extremum von f auf K auf dem Rand von K angenommen wird, so muss es ein kritischer Punkt von f eingeschränkt auf M sein. Diese kritischen Punkte, insgesamt acht, haben wir auch bereits berechnet. Es gibt also neun Kandidaten für die Extrema. Wir müssen nun die Werte der Funktion f in diesen Punkten prüfen, um zu schliessen wo f sein globales Minimum und Maximum annimmt. Die Werte in den kritischen Punkten auf M haben wir bereits berechnet. Im Punkt $(0,0)$, gilt $f(0,0) = 0$. Somit schliessen wir, dass 0 der Minimalwert von f auf K ist, angenommen im Punkt $(0,0)$, und $\sqrt{2}$ der Maximalwert von f auf K ist, angenommen in den vier Punkten aus (4).

10.5. Riemann integral

(a)



(b) Das Riemann-Integral sollte das Volumen unter dem Graphen von f berechnen. Das Volumen des Keils unter diesem Graphen ist gerade die Hälfte vom Volumens des

Quaders $[0,1] \times [0,2] \times [0,1]$, also erwarten wir den Wert 1 für das Riemann-Integral von f.

(c) Wir bemerken zuerst, dass f beschränkt ist. Wir werden f von unten und von oben mit Treppenfunktionen approximieren. Dazu teilen wir für jedes $N \in \mathbb{N}$ den Quader $[0,1] \times [0,2]$ in $2N^2$ gleichgrosse Quader mit Flächeninhalt N^{-2} auf. Wir definieren also für $N \in \mathbb{N}$ die folgende Kollektion von Quadern

$$\mathcal{R}^N = \Big\{ Q^N_{j,k} \,|\, j \in \{1, \dots, N\},\, k \in \{1, \dots, 2N\} \Big\},$$

wobei

$$Q^N_{j,k} = \Big[\frac{j-1}{N}, \frac{j}{N}\Big) \times \Big[\frac{k-1}{N}, \frac{k}{N}\Big).$$

Weiter definieren wir für jedes $N \in \mathbb{N}$ die folgenden beiden Treppenfunktionen:

$$\begin{aligned}
\varphi^N &: [0,1] \times [0,2] \to \mathbb{R}, \quad \varphi^N = \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{2N} \frac{j-1}{N} \chi_{Q^N_{j,k}} \\
\psi^N &: [0,1] \times [0,2] \to \mathbb{R}, \quad \psi^N = \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{2N} \frac{j}{N} \chi_{Q^N_{j,k}},
\end{aligned}$$

wobei $\chi_{Q^N_{j,k}}$ die Indikatorfunktion des Quaders $Q^N_{j,k}$ ist. Die Treppenfunktion φ^N nimmt also auf dem Quader $Q^N_{j,k}$ den Wert $\frac{j-1}{N}$ an, was dem kleinsten Wert der Funktion f auf diesem Quader entspricht. Und ψ^N nimmt auf dem Quader $Q^N_{j,k}$ den Wert $\frac{j}{N}$ an, was dem grössten Wert der Funktion f auf diesem Quader entspricht. Somit gilt offensichtlich für jedes $N \in \mathbb{N}$:

$$\varphi^N(x) \leq f(x) \leq \psi^N(x), \quad \forall x \in [0,1] \times [0,2].$$

Wir berechnen nun das Riemann-Integral dieser Treppenfunktionen. Dazu müssen wir per Definition einfach den Wert der Treppenfunktion auf jedem Quader mit dem Flächeninhalt des Quaders multiplizieren und aufsummieren.

$$\begin{aligned}
\int_{[0,1]\times[0,2]} \varphi^N(x)\,dx &= \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{2N} \frac{j-1}{N} |Q^N_{j,k}| = \frac{1}{N^3} \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{2N} (j-1) = \frac{2}{N^2} \sum_{j=0}^{N-1} j = \frac{N(N-1)}{N^2} \\
\int_{[0,1]\times[0,2]} \psi^N(x)\,dx &= \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{2N} \frac{j}{N} |Q^N_{j,k}| = \frac{1}{N^3} \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{2N} j = \frac{2}{N^2} \sum_{j=1}^{N} j = \frac{N(N+1)}{N^2}.
\end{aligned}$$

Hier haben wir $|Q^N_{j,k}| = N^{-2}$ verwendet. Der Summand ist unabhängig von k, also ergibt die Summe über k einfach $2N$. Weiter haben wir die Formel für die Summe $\sum_{j=1}^{N} j = \frac{N(N+1)}{2}$ verwendet. Wir bemerken, dass $\int_{[0,1]\times[0,2]} \varphi^N(x)\,dx$ monoton wachsend ist in N und $\int_{[0,1]\times[0,2]} \psi^N(x)\,dx$ monoton fallend. Somit gilt

$$\sup\Big\{\int_{[0,1]\times[0,2]} \varphi^N(x)\,dx \mid N\in\mathbb{N}\Big\} = \lim_{N\to\infty} \frac{N(N-1)}{N^2} = 1 \tag{5}$$

$$\inf\Big\{\int_{[0,1]\times[0,2]} \psi^N(x)\,dx \mid N\in\mathbb{N}\Big\} = \lim_{N\to\infty} \frac{N(N+1)}{N^2} = 1. \tag{6}$$

Das untere Riemann-Integral von f ist definiert als das Supremum der Integrale aller Treppenfunktionen die kleiner oder gleich f sind und ist somit grösser oder gleich dem Supremum in (5) über eine Teilmenge solcher Treppenfunktionen. Gleichermassen ist das obere Riemann-Integral von f das Infimum der Integrale aller Treppenfunktionen die grösser oder gleich f sind und ist somit kleiner oder gleich dem Infimum in (6) über eine Teilmenge solcher Treppenfunktionen. Es gilt also

$$\underline{\int}_{[0,1]\times[0,2]} f(x)\,dx \geq 1, \quad \text{und} \quad \overline{\int}_{[0,1]\times[0,2]} f(x)\,dx \leq 1.$$

Somit finden wir

$$\underline{\int}_{[0,1]\times[0,2]} f(x)\,dx \geq \overline{\int}_{[0,1]\times[0,2]} f(x)\,dx$$

und die Funktion f ist eigentlich Riemann-integrierbar. Da umgekehrt immer gilt

$$\underline{\int}_{[0,1]\times[0,2]} f(x)\,dx \leq \overline{\int}_{[0,1]\times[0,2]} f(x)\,dx$$

muss also sogar gelten:

$$\underline{\int}_{[0,1]\times[0,2]} f(x)\,dx = \overline{\int}_{[0,1]\times[0,2]} f(x)\,dx = 1,$$

und wir finden für das Riemann-Integral von f über $[0,1]\times[0,2]$:

$$\int_{[0,1]\times[0,2]} f(x)\,dx = 1.$$

10.6. Nicht Riemann-integrierbare Funktion

Die Indikatorfunktion $\chi_{[0,1]\cap\mathbb{Q}}$ ist offensichtlich beschränkt (es gilt $|\chi_{[0,1]\cap\mathbb{Q}}| \leq 1$). Um zu zeigen, dass $\chi_{[0,1]\cap\mathbb{Q}}$ nicht Riemann-integrierbar ist, müssen wir das obere und untere Riemann-Integral betrachten. Sei $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion mit $\varphi(x) \leq \chi_{[0,1]\cap\mathbb{Q}}(x)$ für alle $x\in[0,1]$. Als Treppenfunktion ist φ von der Form

$$\varphi = \sum_{I\in\mathcal{R}} c_I \chi_I$$

für irgendeine Kollektion $\mathcal{R}$ von Intervallen $I \subseteq [0,1]$ (in Dimension 1 sind Quader einfach Intervalle). Da jedes Intervall I eine irrationale Zahl enthällt, also $I \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \neq \emptyset$, muss für jedes $I \in \mathcal{R}$ gelten: $c_I \leq 0$. Denn für $x \in I$ mit x irrational gilt

$$c_I = \varphi(x) \leq \chi_{[0,1]\cap\mathbb{Q}}(x) = 0.$$

(Um genau zu sein, kann ein Intervall nur rationale Zahlen enthalten, aber nur wenn es aus genau einer Zahl besteht, also wenn $I = \{a\}$ für ein $a \in \mathbb{Q}$. Da solche Intervalle die Länge Null haben, $|\{a\}| = 0$, tragen sie nicht zum Riemann-Integral bei und wir ignorieren sie.) Das Riemann-Integral der Treppenfunktion φ erfüllt also

$$\int_{[0,1]} \varphi(x)\, dx = \sum_{I \in \mathcal{R}} c_I |I| \leq 0.$$

Da dies für jede Treppenfunktion mit $\varphi \leq \chi_{[0,1]\cap\mathbb{Q}}$ gilt, finden wir für das untere Riemann-Integral:

$$\underline{\int}_{[0,1]} \chi_{[0,1]\cap\mathbb{Q}}(x)\, dx = \sup\Big\{ \int_{[0,1]} \varphi\, dx \,\Big|\, \varphi \text{ Treppenfunktion mit } \varphi \leq \chi_{[0,1]\cap\mathbb{Q}} \Big\} \leq 0.$$

(Tatsächlich gilt $\underline{\int}_{[0,1]} \chi_{[0,1]\cap\mathbb{Q}}(x)\, dx = 0$, da die konstante Funktion mit Wert 0 eine Treppenfunktion ist, die überall kleiner oder gleich $\chi_{[0,1]\cap\mathbb{Q}}$ ist.)

Sei nun ψ eine Treppenfunktion mit $\psi(x) \geq \chi_{[0,1]\cap\mathbb{Q}}(x)$ für alle $x \in [0,1]$. Wir schreiben wieder

$$\psi = \sum_{I \in \mathcal{R}'} d_I \chi_I$$

für eine Kollektion $\mathcal{R}'$ von disjunkten Intervallen $I \subseteq [0,1]$ mit $\cup_{I \in \mathcal{R}'} I = [0,1]$ und irgendwelchen Konstanten d_I. Da jedes Intervall eine rationale Zahl enthält (wir ignorieren wieder Intervalle der Länge Null, siehe Kommentar oben), $I \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$, muss $d_I \geq 1$ gelten für alle $I \in \mathcal{R}'$. Tatsächlich, für $x \in I$ rational:

$$d_I = \psi(x) \geq \chi_{[0,1]\cap\mathbb{Q}}(x) = 1.$$

Somit gilt für jede solche Treppenfunktion:

$$\int_{[0,1]} \psi(x)\, dx = \sum_{I \in \mathcal{R}'} d_I |I| \geq \sum_{I \in \mathcal{R}'} |I| = |[0,1]| = 1.$$

Also finden wir für das obere Riemann-Integral

$$\overline{\int}_{[0,1]} \chi_{[0,1]\cap\mathbb{Q}}(x)\, dx = \sup\Big\{ \int_{[0,1]} \psi\, dx \,\Big|\, \psi \text{ Treppenfunktion mit } \psi \geq \chi_{[0,1]\cap\mathbb{Q}} \Big\} \geq 1.$$

(Es gilt sogar $\overline{\int}_{[0,1]} \chi_{[0,1]\cap\mathbb{Q}}(x)\, dx = 1$, da die konstante Funktion mit Wert 1 eine Treppenfunktion ist, die überall grösser oder gleich $\chi_{[0,1]\cap\mathbb{Q}}$ ist.)

Es gilt also

$$\underline{\int}_{[0,1]} \chi_{[0,1]\cap\mathbb{Q}}(x)\,dx < \overline{\int}_{[0,1]} \chi_{[0,1]\cap\mathbb{Q}}(x)\,dx,$$

also das obere und untere Riemann-Integral stimmen nicht überein und damit ist $\chi_{[0,1]\cap\mathbb{Q}}$ nicht Riemann-integrierbar.

10.7. Linearität der Integration

Wir schreiben

$$\phi = \sum_{Q\in\mathcal{R}_1} c_Q\chi_Q, \quad \psi = \sum_{Q'\in\mathcal{R}_2} d_Q\chi_Q$$

für irgendwelche Kollektionen $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ von Quadern in R und konstanten $c_Q, d_Q \in \mathbb{R}$. Offensichtlich ist $c\phi$ wieder eine Treppenfunktion der Form

$$c\phi = \sum_{Q\in\mathcal{R}_1} cc_Q\chi_Q.$$

Für das Riemann-Integral finden wir

$$\int_R c\phi(x)\,dx = \sum_{Q\in\mathcal{R}_1} cc_Q|Q| = c\sum_{Q\in\mathcal{R}_1} c_Q|Q| = c\int_R \phi(x)\,dx.$$

Die Summe der Treppenfunktionen

$$\phi+\psi = \sum_{Q\in\mathcal{R}_1} c_Q\chi_Q + \sum_{Q\in\mathcal{R}_2} c_Q\chi_Q$$

ist wieder eine Treppenfunktion. Falls wir die Vereinigung der beiden Kollektionen $\mathcal{R}_1$ und $\mathcal{R}_2$ betrachten und für $Q \in \mathcal{R}\cup\mathcal{R}'$ die Konstanten $e_Q \in \mathbb{R}$ wie folgt definieren:

$$\begin{aligned}
e_Q &= c_Q \quad \text{falls} \quad Q\in\mathcal{R}_1, Q\notin\mathcal{R}_2,\\
e_Q &= d_Q \quad \text{falls} \quad Q\in\mathcal{R}_2, Q\notin\mathcal{R}_1,\\
e_Q &= c_Q + d_Q \quad \text{falls} \quad Q\in\mathcal{R}_1, Q\in\mathcal{R}_2,
\end{aligned}$$

dann kann die Summe geschrieben werden als

$$\phi+\psi = \sum_{Q\in\mathcal{R}_1\cup\mathcal{R}_2} e_Q\chi_Q.$$

Für das Riemann-Integral finden wir

$$\int_R (\phi+\psi)(x)\,dx = \sum_{Q\in\mathcal{R}_1\cup\mathcal{R}_2} e_Q|Q| = \sum_{Q\in\mathcal{R}_1} c_Q|Q| + \sum_{Q\in\mathcal{R}_2} d_Q|Q| = \int_R \phi(x)\,dx + \int_R \psi(x)\,dx.$$