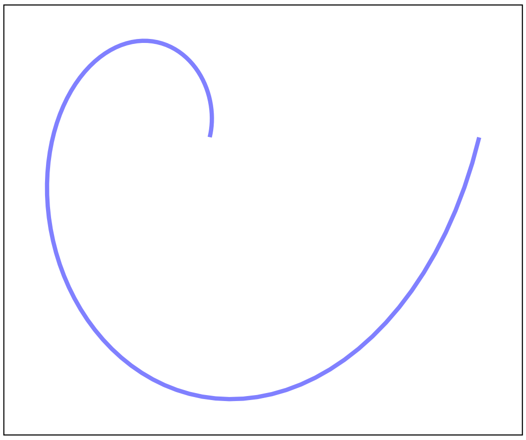
13.1. Länge eines Bogens auf der logarithmischen Spirale.

(a)



(b) Wir zeigen, dass C eine global parametrisierbare Untermannigfaltigkeit mit Rand ist, siehe Definition 6.15 (parametrisierbare Untermannigfaltigkeit) im Skript von Dr. Ziltener. Die globale Parametrisierung der Kurve C ist im Wesentlichen bereits inder Definition von C gegeben. Sei nämlich

$$\psi : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad \psi(t) = \begin{pmatrix} e^t \cos(t) \\ e^t \sin(t) \end{pmatrix},$$

dann ist C das Bild von ψ. Genauer ist das Paar $((0, 2\pi), \psi)$ eine globale Parametrisierung von C. Wir haben bereits in der Serie 9 gezeigt, dass die Abbildung

$$\tilde{\psi} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad \tilde{\psi}(t) = \begin{pmatrix} e^t \cos(t) \\ e^t \sin(t) \end{pmatrix},$$

eine glatte Einbettung ist. Die Abbildung ψ ist einfach die Einschränkung von $\tilde{\psi}$ auf $[0, 2\pi]$ und somit auch eine glatte Einbettung. Somit ist C eine glatte eindimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$ mit Rand.

(c) Der Rand von C ist gegeben durch das Bild unter ψ der beiden Randpunkte 0 und 2π des Intervalls $[0, 2\pi]$, also

$$\partial C = \psi(\partial[0, 2\pi]) = \{\psi(0), \psi(2\pi)\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{2\pi} \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

(d) Die Bogenlänge von C ist gegeben durch das Integral

$$l(C) = \int_C 1 \, ds = \int_0^{2\pi} \|\dot{\psi}(t)\| \, dt,$$

siehe das Skript von Dr. Ziltener. Wir berechnen mit der Produktregel

$$\dot{\psi}(t) = \begin{pmatrix} e^t(\cos(t) - \sin(t)) \\ e^t(\sin(t) + \cos(t)) \end{pmatrix}$$

und finden

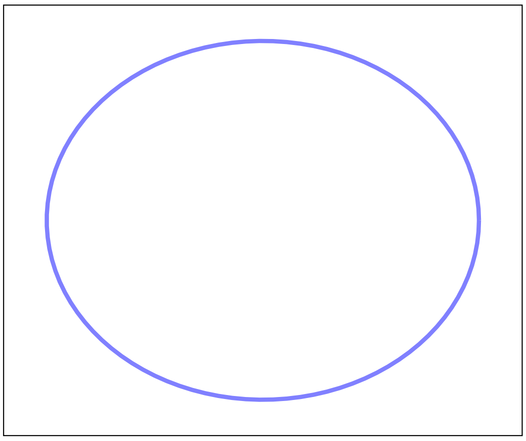
$$\|\dot{\psi}(t)\| = e^t\sqrt{(\cos(t) - \sin(t))^2 + (\sin(t) + \cos(t))^2} = e^t\sqrt{(2\cos^2(t) + 2\sin^2(t))} = \sqrt{2}e^t.$$

Somit lautet die Bogenlänge

$$l(C) = \int_0^{2\pi} \sqrt{2}e^t\,dt = \sqrt{2}e^t\Big|_{t=0}^{t=2\pi} = \sqrt{2}(e^{2\pi} - 1).$$

13.2. Ellipse, Orientierungen, C^k-Gebiet, positive Orientierung des Randes, Kurvenintegral eines Vektorfeldes.

(a)



(b) Wir verwenden den Satz vom regulären Wert, um zu zeigen, dass C eine glatte eindimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$ ist (also eine glatte Kurve). Sei

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad g(x_1, x_2) = x_1^2 + 4x_2^2.$$

Dann ist g eine glatte Funktion mit Ableitung

$$dg(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2x_1 & 8x_2 \end{pmatrix}.$$

Dies ist für alle $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$ eine surjektive lineare Abbildung von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}$. Die Kurve C ist das Urbild von 1 unter g. Da $(0, 0) \notin g^{-1}(1)$ ist 1 ein regulärer Wert von g und $C = g^{-1}(1)$ somit eine glatte Untermannigfaltigkeit der Dimension $2 - 1 = 1$.

(c) Da $C = g^{-1}(1)$, ist der Tangentialraum im Punkt $x \in C$ gegeben durch

$$T_xC = \ker(dg(x)) = \{v \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{pmatrix} 2x_1 & 8x_2 \end{pmatrix} \cdot v = 0\} = \{v \in \mathbb{R}^2 \mid 2x_1v_1 + 8x_2v_2 = 0\},$$

siehe Satz 4.37 (Charakterisierung des Tangentialraumes) in den Notizen von Dr. Ziltener. Dies ist ein eindimensionaler Untervektorraum von $\mathbb{R}^2$. Eine Basis ist z.B. gegeben durch den Vektor $\begin{pmatrix} -4x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$.

Alternativ könnte man die Kurve C auch parametrisieren mit einem Weg γ, sodass $\dot\gamma(t) \neq 0$ für alle t (Immersion). Der Tangentialraum im Punkt $\gamma(t)$ wird dann aufgespannt von der Ableitung $\dot\gamma(t)$, siehe Musterlösung zu Serie 12.

(d) Eine Orientierung von C ist gegeben durch ein Einheitstangentialvektorfeld, also eine stetige Abbildung

$$T : C \to \mathbb{R}^2, \quad \text{mit} \quad T(x) \in T_xC, \quad \text{und} \quad \|T(x)\| = 1 \quad \forall x \in C.$$

Wir bemerken, dass der Vektor

$$\begin{pmatrix} -4x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \in T_xC$$

stetig von C abhängt. Durch Normierung erhalten wir das Einheitstangentialvektorfeld

$$T(x) = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + 16x_2^2}} \begin{pmatrix} -4x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

Es gibt genau eine andere Orientierung von C, nämlich das Einheitstangentialvektorfeld in die entgegengesetzte Richtung:

$$-T = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + 16x_2^2}} \begin{pmatrix} 4x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix}.$$

(e) Der Rand von U ist gerade C, also $\partial U = C$. Wir haben bereits gesehen, dass $C = g^{-1}(1)$. Wir definieren nun die glatte Funktion

$$\tilde g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad \tilde g(x) = g(x) - 1 = x_1^2 + 4x_2^2 - 1.$$

Es gilt $d\tilde g = \tilde g$, und wir haben bereits gesehen, dass die Ableitung von g in jedem Punkt ausser $(0,0)$ surjektiv ist. Somit ist $\tilde g$ eine Submersion auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Jeder Punkt in ∂U liegt in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, dies ist also eine Umgebung von jedem $x \in \partial U$. Des Weiteren gilt

$$U \cap \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} = \tilde g^{-1}((-\infty, 0)) = \{x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \mid \tilde g(x) < 0\}$$

Somit ist U ein C^∞-Gebiet, siehe Definition 6.8 (C^k-Gebiet) im Skript von Dr. Ziltener.

(f) Die Menge
$$U = \{x_1^2 + 4x_2^2 < 1\}$$
ist offen und ihr Abschluss ist gegeben durch
$$\overline{U} = \{x_1^2 + 4x_2^2 \leq 1\}.$$
Wie schon oben bemerkt ist der Rand von U also gerade
$$\partial U = \overline{U} \setminus U = \{x_1^2 + 4x_2^2 = 1\} = C.$$

(g) Siehe Musterlösung zu Serie 12.

(h) Siehe Musterlösung zu Serie 12.

13.3. Integral der Rotation eines Vektorfelds.

Eine Möglichkeit ist das Integral direkt zu berechnen. Es gilt
$$\operatorname{rot} X(x) = \partial_1 X^2(x) - \partial_2 X^1(x) = 2x_1^2 + \|x\|^2 + 2x_2^2 + \|x\|^2 = 4\|x\|^2.$$
Und unter Verwendung von Polarkoordinaten und der Substitutionsregel finden wir:
$$\int_{B^2} \operatorname{rot} X(x)\, dx = \int_0^1 \int_0^{2\pi} 4r^2\, r\, d\phi dr = 2\pi \int_0^1 4r^3\, dr = 2\pi r^4 \Big|_{r=0}^{r=1} = 2\pi.$$
Alternativ können wir den Satz von Green verwenden. Es gilt
$$\int_{B^2} \operatorname{rot} X(x)\, dx = \int_{\partial B^2} X \cdot d\mathbf{s} = \int_{S^1} X \cdot d\mathbf{s},$$
wobei wir für das Kurvenintegral das positiv orientierte Einheitstangentialvektorfeld verwenden müssen. Dies entspricht einer parametrisierung des Einheitskreises bei der das Innere immer zur Linken liegt, also
$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}.$$
Da $\|\gamma(t)\|^2 = 1$ für alle t, finden wir
$$\int_{S^1} X \cdot d\mathbf{s} = \int_0^{2\pi} X(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)\, dt = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} dt = \int_0^{2\pi} 1\, dt = 2\pi$$

13.4. Gramsche Determinante für eine 3×2-Matrix.

Wir schreiben

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \end{pmatrix},$$

wobei $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^3$ die Spalten von A sind. Die transponierte Matrix lautet

$$A^T = \begin{pmatrix} A_1^T \\ A_2^T \end{pmatrix},$$

also die Vektoren A_1, A_2 sind die Reihen von A^T. Die Matrix-Multiplikation ergibt

$$A^T A = \begin{pmatrix} A_1 \cdot A_1 & A_1 \cdot A_2 \\ A_2 \cdot A_1 & A_2 \cdot A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|A_1\|^2 & A_1 \cdot A_2 \\ A_1 \cdot A_2 & \|A_2\|^2 \end{pmatrix},$$

wobei $v \cdot w$ das Skalarprodukt von zwei Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^3$ bezeichnet. Die Gramsche Determinante lautet also

$$\det(A^T A) = \|A_1\|^2 \|A_2\|^2 - (A_1 \cdot A_2)^2.$$

Sei nun α der Winkel zwischen den Vektoren A_1 und A_2. Wir erinnern uns, dass die Länge des Kreuzproduktes von A_1 und A_2 gegeben ist durch

$$\|A_1 \times A_2\| = \|A_1\| \|A_2\| \sin(\alpha).$$

Andererseits gilt für das Skalarprodukt:

$$A_1 \cdot A_2 = \|A_1\| \|A_2\| \cos(\alpha).$$

Somit finden wir

$$\begin{aligned} \det(A^T A) &= \|A_1\|^2 \|A_2\|^2 - (A_1 \cdot A_2)^2 = \|A_1\|^2 \|A_2\|^2 - \|A_1\|^2 \|A_2\|^2 \cos^2(\alpha) \\ &= \|A_1\|^2 \|A_2\|^2 (1 - \cos^2(\alpha)) = \|A_1\|^2 \|A_2\|^2 \sin^2(\alpha) = \|A_1 \times A_2\|^2. \end{aligned}$$

Alternativ kann man direkt mit den Koeffizienten rechnen. Für $v, w \in \mathbb{R}^3$ gilt

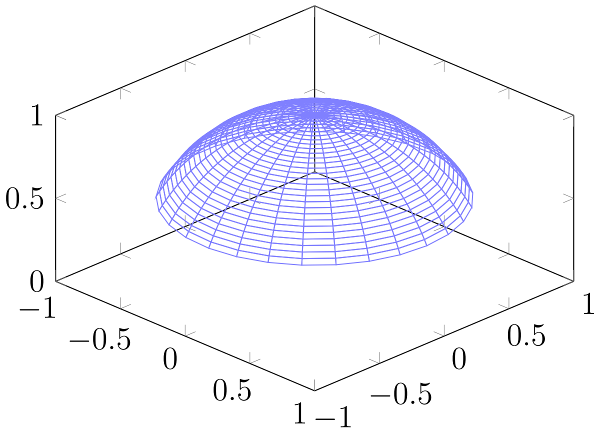
$$v \times w = \begin{pmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{pmatrix},$$

also

$$\begin{aligned} \|v \times w\|^2 &= (v_2 w_3 - v_3 w_2)^2 + (v_3 w_1 - v_1 w_3)^2 + (v_1 w_2 - v_2 w_1)^2 \\ &= v_1^2 (w_2^2 + w_3^2) + v_2^2 (w_1^2 + w_3^2) + v_3^2 (w_1^2 + w_2^2) \\ &\quad - 2 v_1 w_1 v_2 w_2 - 2 v_1 w_1 v_3 w_3 - 2 v_2 w_2 v_3 w_3 \\ &= (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)(w_1^2 + w_2^2 + w_3^2) \\ &\quad - v_1^2 w_1^2 - v_2^2 w_2^2 - v_3^2 w_3^2 - 2 v_1 w_1 v_2 w_2 - 2 v_1 w_1 v_3 w_3 - 2 v_2 w_2 v_3 w_3 \\ &= (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)(w_1^2 + w_2^2 + w_3^2) - (v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3)^2 \\ &= \|v\|^2 \|w\|^2 - (v \cdot w)^2. \end{aligned}$$

13.5. Kugelkappe, intrinsischer Rand, Koorientierung, induzierte Orientierung des Randes, Flächeninhalt.

(a)



(b) Für $x \in \Sigma$ gilt $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ und $x_3 \geq a$. Somit muss gelten $x_1^2 + x_2^2 \leq 1 - a^2$, also (x_1, x_2) liegt in $\overline{B}^2_{\sqrt{1-a^2}}$, der Kreisscheibe mit Radius $\sqrt{1-a^2}$. Wir können Σ wie folgt parametrisieren:

$$\psi : \overline{B}^2_{\sqrt{1-a^2}} \to \mathbb{R}^3, \quad \psi(y_1, y_2) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \sqrt{1 - y_1^2 - y_2^2} \end{pmatrix}.$$

Wir bemerken, dass ψ glatt ist (da $y_1^2 + y_2^2 < 1$) und $\Sigma = \psi(\overline{B}^2_{\sqrt{1-a^2}})$. Wir müssen noch zeigen, dass ψ eine Einbettung ist. Dazu berechnen wir

$$d\psi(y_1, y_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -\frac{y_1}{\sqrt{1-y_1^2-y_2^2}} & -\frac{y_2}{\sqrt{1-y_1^2-y_2^2}} \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix hat für jedes (y_1, y_2) Rang 2, also ist $d\psi(y_1, y_2)$ eine injektive Abbildung von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^3$. Somit ist ψ eine Immersion. Die Abbildung ψ ist auch offensichtlich injektiv. Die Umkehrung zu ψ ist gegeben durch

$$\psi^{-1} : \Sigma \to \overline{B}^2_{\sqrt{1-a^2}}, \quad \psi(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

was offensichtlich glatt ist. Die Abbildung ψ, genauer das Paar $(B^2_{\sqrt{1-a^2}}, \psi)$ ist also eine globale Parametrisierung von Σ und Σ somit eine glatte zweidimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$ mit Rand.

(c) Der (intrinsische) Rand von Σ kann einfach mit der globalen Parametrisierung bestimmt werden:

$$\partial\Sigma = \psi(\partial B^2_{\sqrt{1-a^2}}),$$

wobei

$$\partial B^2_{\sqrt{1-a^2}} = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y_1^2 + y_2^2 = 1 - a^2\}$$

der Rand der Kreisscheibe $B^2_{\sqrt{1-a^2}}$ ist. Es gilt also

$$\begin{aligned} \partial\Sigma &= \left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \sqrt{1 - y_1^2 - y_2^2} \end{pmatrix} \,\middle|\, (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2,\, y_1^2 + y_2^2 = 1 - a^2 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ a \end{pmatrix} \,\middle|\, (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2,\, y_1^2 + y_2^2 = 1 - a^2 \right\}. \end{aligned}$$

(d) Eine Koorientierung von Σ ist gegeben durch ein Einheitsnormalvektorfeld, also eine stetige Abbildung

$$\nu : \Sigma \to \mathbb{R}^3, \quad \text{mit} \quad \nu(x) \in T_x\Sigma^\perp, \quad \text{und} \quad \|\nu(x)\| = 1 \quad \forall x \in \Sigma.$$

Also $\nu(x)$ ist ein normierter Vektor, der orthogonal zum Tangentialraum $T_x\Sigma$ liegt. Da $\Sigma \subseteq S^2$ eine Teilmenge der Sphäre ist, erhalten wir ein Einheitsnormalvektorfeld auf Σ durch die Einschränkung auf Σ eines Einheitsnormalvektorfeldes auf der Sphäre. Die zwei Koorientierungen auf S^2 sind

$$\tilde{\nu} : S^2 \to \mathbb{R}^3, \quad \tilde{\nu}(x) = x, \quad \text{und} \quad -\tilde{\nu}(x) = -x.$$

Somit sind

$$\nu : \Sigma \to \mathbb{R}^3, \quad \nu(x) = x, \quad \text{und} \quad -\nu(x) = -x$$

die zwei Koorientierungen auf Σ.

Alternativ, und nützlicher für den allgemeinen Fall, kann man ein Normalvektorfeld anhand der Parametrisierung ψ konstruieren. In jedem Punkt $\psi(y) \in \Sigma$ sind die Vektoren $\partial_{y_1}\psi(y), \partial_{y_2}\psi(y) \in \mathbb{R}^3$ zwei unabhängige Tangentialvektoren. Somit liegt ihr Kreuzprodukt $\partial_{y_1}\psi(y) \times \partial_{y_2}\psi(y)$ orthogonal zum Tangentialraum in $\psi(y)$. Durch Normieren erhalten wir ein Einheitsnormalvektor:

$$\nu(\psi(y)) = \frac{1}{\|\partial_{y_1}\psi(y) \times \partial_{y_2}\psi(y)\|} \partial_{y_1}\psi(y) \times \partial_{y_2}\psi(y).$$

Wir berechnen

$$\partial_{y_1}\psi(y_1,y_2)\times\partial_{y_2}\psi(y_1,y_2)=\begin{pmatrix}1\\0\\-\frac{y_1}{\sqrt{1-y_1^2-y_2^2}}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\1\\-\frac{y_2}{\sqrt{1-y_1^2-y_2^2}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{y_1}{\sqrt{1-y_1^2-y_2^2}}\\\frac{y_2}{\sqrt{1-y_1^2-y_2^2}}\\1\end{pmatrix}.$$

Das Quadrat der Norm ist gegeben durch

$$\begin{aligned}\|\partial_{y_1}\psi(y_1,y_2)\times\partial_{y_2}\psi(y_1,y_2)\|^2&=\frac{y_1^2}{1-y_1^2-y_2^2}+\frac{y_2^2}{1-y_1^2-y_2^2}+1\\&=\frac{y_1^2+y_2^2}{1-y_1^2-y_2^2}+\frac{1-y_1^2-y_2^2}{1-y_1^2-y_2^2}=\frac{1}{1-y_1^2-y_2^2}.\end{aligned}$$

Wir finden also

$$\nu(\psi(y_1,y_2))=\sqrt{1-y_1^2-y_2^2}\begin{pmatrix}\frac{y_1}{\sqrt{1-y_1^2-y_2^2}}\\\frac{y_2}{\sqrt{1-y_1^2-y_2^2}}\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\sqrt{1-y_1^2-y_2^2}\end{pmatrix}=\psi(y_1,y_2)$$

Dieses Einheitsnormalvektorfeld stimmt also mit $\nu(x)=x$ überein. Die andere Koorientierung ist gegeben durch $-\nu$.

(e) Die Koorientierung

$$\nu(\psi(y))=\frac{1}{\|\partial_{y_1}\psi(y)\times\partial_{y_2}\psi(y)\|}\partial_{y_1}\psi(y)\times\partial_{y_2}\psi(y),$$

welche durch die globale Parametrisierung $\psi: B^2_{\sqrt{1-a^2}}\to\mathbb{R}^3$ bestimmt ist, induziert eine Orientierung auf dem Rand $\partial\Sigma$. Sie ist gegeben indem man die positive Orientierung $\tilde{T}(y)$ auf $\partial B^2_{\sqrt{1-a^2}}$ nimmt und mit der Ableitung der Parametrisierung $d\psi(y)$ nach $T_{\psi(y)}\partial\Sigma$ abbildet und normiert, also

$$T:\partial\Sigma\to\mathbb{R}^3,\quad T(\psi(y))=\frac{1}{\|d\psi(y)\tilde{T}(y)\|}d\psi(y)\tilde{T}(y).$$

Wir haben die Ableitung $d\psi$ bereits berechnet. Die positive Orientierung auf dem Kreis $\partial B^2_{\sqrt{1-a^2}}$ ist das Einheitstangentialvektorfeld, sodass die Kreisscheibe $B^2_{\sqrt{1-a^2}}$ immer zur Linken liegt. Es ist gegeben durch

$$\tilde{T}:\partial B^2_{\sqrt{1-a^2}}\to\mathbb{R}^2,\quad\tilde{T}(y_1,y_2)=\frac{1}{\sqrt{1-a^2}}\begin{pmatrix}-y_2\\y_1\end{pmatrix}.$$

Wir berechnen:

$$d\psi(y_1,y_2)\tilde{T}(y_1,y_2) = \frac{1}{\sqrt{1-a^2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -\frac{y_1}{\sqrt{1-y_1^2-y_2^2}} & -\frac{y_2}{\sqrt{1-y_1^2-y_2^2}} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -y_2 \\ y_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-a^2}}\begin{pmatrix} -y_2 \\ y_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wir bemerken, dass dieser Vektor bereits normiert ist, da $y_1^2 + y_2^2 = 1 - a^2$ für $(y_1, y_2) \in \partial B^2_{\sqrt{1-a^2}}$. Die induzierte Orientierung auf dem Rand ist also gegeben durch

$$T(\psi(y)) = \frac{1}{\sqrt{1-a^2}}\begin{pmatrix} -y_2 \\ y_1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

oder mit $(x_1, x_2, x_3) = \psi(y_1, y_2) = (y_1, y_2, \sqrt{1-y_1^2-y_2^2})$:

$$T : \partial\Sigma \to \mathbb{R}^3, \quad T(x) = \frac{1}{\sqrt{1-a^2}}\begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(f) Der Flächeninhalt von Σ ist gegeben durch das folgende Flächenintegral über Σ:

$$\mathrm{Vol}_2(\Sigma) = \int_\Sigma 1\, dA.$$

Im Fall der zweidimensionalen Fläche Σ in $\mathbb{R}^3$, kann dieses Integral anhand der Parametrisierung $\psi : \overline{B}^2_{\sqrt{1-a^2}} \to \mathbb{R}^3$, wie folgt berechnet werden:

$$\int_\Sigma 1\, dA = \int_{\overline{B}^2_{\sqrt{1-a^2}}} \|\partial_{y_1}\psi(y) \times \partial_{y_2}\psi(y)\|\, dy,$$

wobei das Integral auf der rechten Seite einfach das zweidimensionale Riemann-Integral über die Kreisscheibe $\overline{B}^2_{\sqrt{1-a^2}}$ ist. Wir setzten

$$\|\partial_{y_1}\psi(y) \times \partial_{y_2}\psi(y)\| = \frac{1}{\sqrt{1-y_1^2-y_2^2}}$$

ein und verwenden Polarkoordinaten und die Substitionsregel, um das Riemann-Integral auszurechnen:

$$\begin{aligned}\int_\Sigma 1\, dA &= \int_{\overline{B}^2_{\sqrt{1-a^2}}} \frac{1}{\sqrt{1-y_1^2-y_2^2}}\, dy = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{1-a^2}} \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} r\, dr d\phi \\ &= 2\pi \int_0^{\sqrt{1-a^2}} \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\, dr = -2\pi\sqrt{1-r^2}\Big|_{r=0}^{r=\sqrt{1-a^2}} = 2\pi(1-a).\end{aligned}$$

(g) Wir haben oben für $a \in (0,1)$ den Flächeninhalt der Kugelkappe $\{x \in S^2 \,|\, x_3 \geq a\}$ berechnet. Im Limes $a \to 0$ erhalten wir den Flächeninhalt der Halbsphäre $\{x \in S^2 \,|\, x_3 \geq 0\}$. Dieser beträgt laut der Formel oben $\lim_{a\to 0} 2\pi(1-a) = 2\pi$. Die Sphäre S^2 besteht aus den beiden identischen Halbsphären $\{x \in S^2 \,|\, x_3 \geq 0\}$ und $\{x \in S^2 \,|\, x_3 \leq 0\}$, wobei der Schnitt der beiden Halbsphären der eindimensionale Kreis $\{x \in S^2 \,|\, x_3 = 0\}$ ist, dessen zweidimensionaler Flächeninhalt Null ist. Der Flächeninhalt der Sphäre betragt also zweimal 2π:

$$\mathrm{Vol}(S^2) = 4\pi.$$