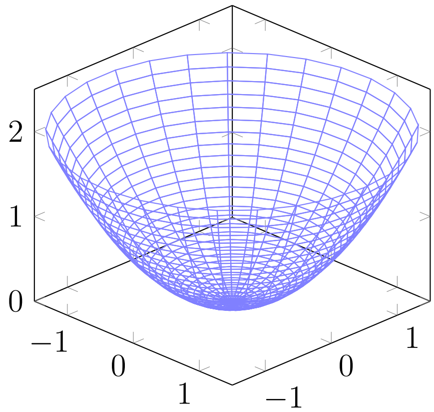
### 14.1. Abgeschnittenes Paraboloid, intrinsischer Rand, Koorientierung, induzierte Orientierung des Randes, Flächeninhalt.

**(a)**




**(b)** Wir zeigen, dass $\Sigma$ global parametrisiert werden kann, siehe Definition 6.15 (parametrisierbare Untermannigfaltigkeit) in den Notizen von Dr. Ziltener. Für alle $x \in \Sigma$ gilt $x_1^2 + x_2^2 \leq r_0^2$, also liegt der Vektor $(x_1, x_2)$ in $\overline{B}^2_{r_0}$, der abgeschlossenen Kreisscheibe mit Radius $r_0$. Zu jedem solchen $(x_1, x_2)$ genau ein Punkt $x \in \Sigma$, nämlich mit $x_3 = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$. Wir können $\Sigma$ also wie folgt parametrisieren:

$$\psi : \overline{B}^2_{r_0} \to \mathbb{R}^3, \quad \psi(y_1, y_2) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2) \end{pmatrix}.$$

Die Abbildung $\psi$ ist glatt und es gilt $\Sigma = \psi(\overline{B}^2_{\sqrt{1-a^2}})$. Wir zeigen noch, dass $\psi$ eine Einbettung ist. Es gilt

$$d\psi(y_1, y_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix hat für jedes $(y_1, y_2)$ Rang 2, also ist $d\psi(y_1, y_2)$ eine injektive Abbildung von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^3$. Somit ist $\psi$ eine Immersion. Die Abbildung $\psi$ ist offensichtlich auch injektiv und die Umkehrung ist gegeben durch

$$\psi^{-1} : \Sigma \to \overline{B}^2_{r_0}, \quad \psi(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

was offensichtlich glatt ist. Die Abbildung $\psi$, genauer das Paar $(B^2_{r_0}, \psi)$ ist also eine globale Parametrisierung von $\Sigma$ und $\Sigma$ somit eine glatte zweidimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$ mit Rand.

**(c)** Der (intrinsische) Rand von $\Sigma$ ist gegeben durch

$$\partial\Sigma = \psi(\partial B^2_{r_0}),$$

wobei

$$\partial B^2_{r_0^2} = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y_1^2 + y_2^2 = r_0^2\}.$$

Es gilt also

$$\begin{aligned}\partial\Sigma &= \left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2) \end{pmatrix} \,\middle|\, (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2,\, y_1^2 + y_2^2 = r_0^2 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \frac{1}{2}r_0^2 \end{pmatrix} \,\middle|\, (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2,\, y_1^2 + y_2^2 = r_0^2 \right\}.\end{aligned}$$

**(d)** Eine Koorientierung von $\Sigma$ ist gegeben durch das Einheitsnormalvektorfeld

$$\nu(\psi(y)) = \frac{1}{\|\partial_{y_1}\psi(y) \times \partial_{y_2}\psi(y)\|}\partial_{y_1}\psi(y) \times \partial_{y_2}\psi(y).$$

Wir berechnen

$$\partial_{y_1}\psi(y_1, y_2) \times \partial_{y_2}\psi(y_1, y_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ y_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y_1 \\ -y_2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die Norm dieses Vektors ist

$$\|\partial_{y_1}\psi(y_1, y_2) \times \partial_{y_2}\psi(y_1, y_2)\| = \sqrt{1 + y_1^2 + y_2^2}.$$

Wir finden also als Koorientierung:

$$\nu(\psi(y_1, y_2)) = \frac{1}{\sqrt{1 + y_1^2 + y_2^2}} \begin{pmatrix} -y_1 \\ -y_2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

In den Koordinaten $(x_1, x_2, x_3)$ auf $\mathbb{R}^3$ kann dies wie folgt geschrieben werden:

$$\nu(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x_1^2 + x_2^2}} \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 + 2x_3}} \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die andere Koorientierung ist gegeben durch $-\nu(x)$.

**(e)** Die durch die Koorientierung

$$\nu(\psi(y)) = \frac{1}{\|\partial_{y_1}\psi(y) \times \partial_{y_2}\psi(y)\|}\partial_{y_1}\psi(y) \times \partial_{y_2}\psi(y),$$

bestimmte Orientierung des Randes $\partial\Sigma$ ist gegeben durch

$$T : \partial\Sigma \to \mathbb{R}^3, \quad T(\psi(y)) = \frac{1}{\|d\psi(y)\tilde{T}(y)\|} d\psi(y)\tilde{T}(y),$$

wobei $\tilde{T}(y)$ die positive Orientierung auf $\partial\overline{B}^2_{r_0}$ ist. Diese ist gegeben durch

$$\tilde{T} : \partial B^2_{r_0} \to \mathbb{R}^2, \quad \tilde{T}(y_1, y_2) = \frac{1}{r_0}\begin{pmatrix} -y_2 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

(Es ist das Einheitstangentialvektorfeld auf $\partial\overline{B}^2_{r_0}$, sodass die Kreisscheibe $B^2_{r_0}$ immer zur Linken liegt). Wir berechnen:

$$d\psi(y_1, y_2)\tilde{T}(y_1, y_2) = \frac{1}{r_0}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -y_2 \\ y_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{r_0}\begin{pmatrix} -y_2 \\ y_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wir bemerken, dass dieser Vektor bereits normiert ist, da $y_1^2 + y_2^2 = r_0^2$ für $(y_1, y_2) \in \partial B^2_{r_0}$. In den Koordinaten $(x_1, x_2, x_3)$ auf $\mathbb{R}^3$ ist die induzierte Orientierung auf dem Rand also gegeben durch

$$T : \partial\Sigma \to \mathbb{R}^3, \quad T(x) = \frac{1}{r_0}\begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

**(f)** Der Flächeninhalt von $\Sigma$ wird mit dem folgenden Flächenintegral berechnet:

$$\mathrm{Vol}_2(\Sigma) = \int_\Sigma 1\, dA = \int_{\overline{B}^2_{r_0}} \|\partial_{y_1}\psi(y) \times \partial_{y_2}\psi(y)\|\, dy.$$

Wir haben bereits berechnet:

$$\|\partial_{y_1}\psi(y) \times \partial_{y_2}\psi(y)\| = \sqrt{1 + y_1^2 + y_2^2}.$$

Mit Polarkoordinaten und der Substitionsregel finden wir:

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}_2(\Sigma) &= \int_{\overline{B}^2_{r_0}} \sqrt{1 + y_1^2 + y_2^2}\, dy = \int_0^{2\pi}\int_0^{r_0} \sqrt{1 + r^2}r\, dr d\phi \\ &= 2\pi \int_0^{r_0} \sqrt{1 + r^2}r\, dr = \frac{2\pi}{3}(1 + r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_{r=0}^{r=r_0} = \frac{2\pi}{3}\Big((1 + r_0^2)^{\frac{3}{2}} - 1\Big).\end{aligned}$$

**(g)** Wir wissen, dass der Flächeninhalt der Kreisscheibe $\mathrm{Vol}_2(\overline{B}^2_{r_0}) = \pi r_0^2$ beträgt. Der gefragte Grenzwert ist also

$$\lim_{r_0\to 0} \frac{\mathrm{Vol}_2(\Sigma_{r_0})}{\mathrm{Vol}_2(\overline{B}^2_{r_0})} = \lim_{r_0\to 0} \frac{\frac{2}{3}((1+r_0^2)^{\frac{3}{2}}-1)}{r_0^2} = \lim_{r_0\to 0} \frac{2r_0\sqrt{1+r_0^2}}{2r_0} = \lim_{r_0\to 0} \sqrt{1+r_0^2} = 1,$$

wobei wir die Regel von de L'Hospital verwendet haben. Im Grenzwert $r_0 \to 0$ stimmt also der Flächeninhalt des Paraboloids $\Sigma_{r_0}$ immer wie mehr mit der Fläche der Kreisscheibe $\overline{B}^2_{r_0}$ überein. Dies ist vernünftig, da für sehr kleines $r_0$ die Fläche $\Sigma_{r_0}$ fast wie eine Scheibe in $\mathbb{R}^2$ aussieht.

## 14.2. Fluss durch abgeschnittenes Paraboloid, Satz von Stokes

**(a)** Laut Definition 6.33 (Fluss durch Hyperfläche) in den Notizen von Dr. Ziltener ist der Fluss von einem Vektorfeld $X$ durch $\Sigma$ gegeben durch

$$\int_{\Sigma,\nu} X \cdot d\mathbf{A} = \int_{\Sigma} X(x)\cdot \nu(x)\, dA.$$

Im Fall von unserer zweidimensionalen Untermannigfaltigkeit $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ mit globaler Parametrisierung $\psi$ ist dieses Integral gegeben durch

$$\int_{\Sigma,\nu} X \cdot d\mathbf{A} = \int_{\overline{B}_{r_0}} X(\psi(y))\cdot (\partial_{y_1}\psi(y) \times \partial_{y_2}\psi(y))\, dy,$$

wobei im Integral das Skalarprodukt zwischen den Vektoren $\partial_{y_1}\psi(y) \times \partial_{y_2}\psi(y)$ und $X(\psi(y))$ vorkommt. Wir haben bereits berechnet:

$$\partial_{y_1}\psi(y_1,y_2) \times \partial_{y_2}\psi(y_1,y_2) = \begin{pmatrix} -y_1 \\ -y_2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Für

$$X(x) = e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ist das Skalarprodukt

$$X(\psi(y))\cdot(\partial_{y_1}\psi(y) \times \partial_{y_2}\psi(y)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -y_1 \\ -y_2 \\ 1 \end{pmatrix} = 1.$$

Der Fluss ist also

$$\int_{\Sigma,\nu} X \cdot d\mathbf{A} = \int_{\overline{B}_{r_0}} 1\, dy = \mathrm{Vol}_2(\overline{B}_{r_0}) = \pi r_0^2.$$

Für

$$X(x) = e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ist das Skalarprodukt

$$X(\psi(y)) \cdot (\partial_{y_1}\psi(y) \times \partial_{y_2}\psi(y)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -y_1 \\ -y_2 \\ 1 \end{pmatrix} = -y_1.$$

Der Fluss ist also

$$\int_{\Sigma,\nu} X \cdot d\mathbf{A} = -\int_{\overline{B}_{r_0}} y_1\, dy = 0.$$

Das letzte Integral verschwindet dank einem Symmetrie-Argument oder man könnte direkt in Polarkoordinaten rechnen

$$\int_{\overline{B}_{r_0}} y_1\, dy = \int_0^{r_0} \int_0^{2\pi} r^2 \cos(\phi)\, d\phi dr = 0,$$

da $\int_0^{2\pi} \cos(\phi)\, d\phi = 0$.

**(b)** Laut dem Satz von Stokes, siehe Satz 6.37 (Stokes) in den Notizen von Dr. Ziltener, gilt

$$\int_{\Sigma,\nu} (\nabla \times Y) \cdot d\mathbf{A} = \int_{\partial\Sigma,T} Y \cdot d\mathbf{s} = \int_{\partial\Sigma} Y \cdot T\, ds,$$

wobei $T$ die durch $\nu$ induzierte Orientierung auf dem Rand $\partial\Sigma$ ist. Diese Orientierung haben wir bereits in der vorherigen Aufgabe berechnet:

$$T(x) = \frac{1}{r_0} \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Das Skalarprodukt lautet

$$Y(x) \cdot T(x) = \frac{1}{r_0} \sin(x_3) \begin{pmatrix} x_3 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{r_0} \sin(x_3)(x_1^2 - x_2 x_3).$$

Um das Kurvenintegral zu berechnen, parametrisieren wir

$$\partial\Sigma = \left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \frac{1}{2} r_0^2 \end{pmatrix} \;\middle|\; (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2,\, y_1^2 + y_2^2 = r_0^2 \right\}$$

mit dem Weg:

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3, \quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} r_0 \cos(t) \\ r_0 \sin(t) \\ \frac{1}{2} r_0^2 \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} -r_0 \sin(t) \\ r_0 \cos(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \|\dot{\gamma}(t)\| = r_0.$$

Das Kurvenintegral lautet somit

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Sigma} Y \cdot T \, ds &= \int_0^{2\pi} Y(\gamma(t)) \cdot T(\gamma(t)) \|\dot{\gamma}(t)\| \, dt = \sin\Big(\frac{r_0^2}{2}\Big) \int_0^{2\pi} \Big( r_0^2 \cos^2(t) - \frac{r_0^3}{2} \sin(t) \Big) \, dt \\ &= r_0^2 \sin\Big(\frac{r_0^2}{2}\Big) \int_0^{2\pi} \cos^2(t) \, dt = \pi r_0^2 \sin\Big(\frac{r_0^2}{2}\Big). \end{aligned}$$

Alternativ könnte man auch direkt die Kurve $\partial\Sigma$ parametrisieren und das Kurvenintegral durch

$$\int_{\partial\Sigma, T} Y \cdot d\mathbf{s} = \int_0^{2\pi} Y(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) \, dt$$

berechnen. Dabei muss man aber aufpassen, dass $\gamma$ die richtige Orientierung induziert, also $\|\dot{\gamma}\|^{-1}\dot{\gamma}$ mit $T$ übereinstimmt, was für die Parametrisierung oben der Fall ist.

**(c)** Wir suchen zuerst ein Vektorfeld $Y$, sodass

$$\nabla \times Y(x) = e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^3.$$

Es muss also gelten

$$\partial_{x_1} Y^2 - \partial_{x_2} Y^1 = 1, \quad \partial_{x_3} Y^1 - \partial_{x_1} Y^3 = 0, \quad \partial_{x_2} Y^3 - \partial_{x_3} Y^2 = 0.$$

Die erste Gleichung ist zum Beispiel erfüllt durch $Y_2(x) = x_1$ und $Y^1(x) = 0$. Wir sehen dann, dass mit $Y^3(x) = 0$ alle Gleichungen erfüllt sind, also setzen wir

$$Y(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Laut dem Satz von Stokes gilt nun

$$\int_{\Sigma,\nu} e_3 \cdot d\mathbf{A} = \int_{\Sigma,\nu} (\nabla \times Y) \cdot d\mathbf{A} = \int_{\partial\Sigma} Y \cdot T \, ds,$$

wobei $T$ die durch $\nu$ induzierte Orientierung auf dem Rand $\partial\Sigma$ ist. Wir finden

$$Y(x) \cdot T(x) = \frac{1}{r_0} \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{r_0} x_1^2.$$

Wir parametrisieren $\partial\Sigma$ wie oben und finden

$$\int_{\partial\Sigma} Y \cdot T \, ds = \int_0^{2\pi} Y(\gamma(t)) \cdot T(\gamma(t)) \|\dot{\gamma}(t)\| \, dt = \int_0^{2\pi} r_0^2 \cos(t)^2 \, dt = \pi r_0^2,$$

was natürlich mit der Berechnung ohne Satz von Stokes übereinstimmt.

### 14.3. Satz von Gauß.

**(a)** Die Divergenz von $X$ lautet

$$\nabla \cdot X(x) = \partial_{x_1} X^1(x) + \partial_{x_2} X^2(x) = \partial_{x_1}(x_1^2 - x_2^2) + \partial_{x_2}(x_1^2 + x_2^2) = 2x_1 + 2x_2.$$

**(b)** Der Rand des Kreisrings $U = B_2^2 \setminus \overline{B}_1^2$ besteht aus zwei Komponenten:

$$\partial U = \partial B_2^2 \cup \partial B_1^2,$$

also $\partial U$ ist die disjunkte Vereinigung der beiden Kreise mit Radius 1 und 2. Die Menge $U$ liegt zwischen diesen Kreisen. Demnach ist ein nach aussen weisendes Einheitsnormalvektorfeld gegeben durch

$$\nu : \partial B_2^2 \cup \partial B_1^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \nu(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x, & \text{falls} \quad x \in \partial B_2^2 \\ -x, & \text{falls} \quad x \in \partial B_1^2 \end{cases}.$$

**(c)** Es gilt

$$\int_{\partial U, \nu} X \cdot d\mathbf{A} = \int_{\partial U} X \cdot \nu \, dA = \int_{\partial B_2^2} X \cdot \nu \, dA + \int_{\partial B_1^2} X \cdot \nu \, dA.$$

Wir parametrisieren die beiden Kreise wie folgt

$$\gamma_1 : [0, 2\pi] \to \partial B_1^2, \quad \gamma_1(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$
$$\gamma_2 : [0, 2\pi] \to \partial B_2^2, \quad \gamma_2(t) = 2 \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}.$$

Es gilt
$$\|\dot\gamma_1(t)\| = 1, \quad \|\dot\gamma_1(t)\| = 2.$$
und
$$X(\gamma_1(t)) = \begin{pmatrix} \cos^2(t) - \sin^2(t) \\ \cos^2(t) - \sin^2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2t) \\ 1 \end{pmatrix}, \quad X(\gamma_2(t)) = 4\begin{pmatrix} \cos(2t) \\ 1 \end{pmatrix}.$$
Laut Proposition 6.25 (Integral über Untermannigfaltigkeit) in den Notizen von Dr. Ziltener kommt in den Integralen oben die Wurzel der Gramschen Determinante vor, also $\sqrt{\det(d\gamma(t)^T d\gamma(t))}$. Da $d\gamma(t) = \dot\gamma(t)$ einfach ein Vektor ist, gilt
$$d\gamma(t)^T d\gamma(t)) = \dot\gamma(t)\cdot\dot\gamma(t) = \|\dot\gamma(t)\|^2.$$
Die Determinante dieser $1\times 1$ Matrix ist einfach die Zahl selbst und die Wurzel ergibt die Norm von $\dot\gamma(t)$. Die Integrale oben sind also einfach Kurvenintegrale.

Wir berechnen:
$$\begin{aligned}
\int_{\partial U,\nu} X\cdot d\mathbf{A} &= \int_{\partial B_2^2} X\cdot\nu\, dA + \int_{\partial B_1^2} X\cdot\nu\, dA \\
&= \int_0^{2\pi} X(\gamma_2(t))\cdot\nu(\gamma_2(t))\|\dot\gamma_2(t)\|\, dt + \int_0^{2\pi} X(\gamma_1(t))\cdot\nu(\gamma_1(t))\|\dot\gamma_1(t)\|\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} 4\begin{pmatrix} \cos(2t) \\ 1 \end{pmatrix}\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} 2\, dt + \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos(2t) \\ 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -\cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix} dt \\
&= \int_0^{2\pi} 4(\cos(2t)\cos(t) + \sin(t))\, dt - \int_0^{2\pi} (\cos(2t)\cos(t) + \sin(t))\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} 3(\cos(2t)\cos(t) + \sin(t))\, dt = 0.
\end{aligned}$$
Im letzten Schritt haben wir die Additionsformeln für Cosinus und Sinus verwendet, um $\cos(2t)\cos(t) = \frac{1}{2}(\cos(3t) + \cos(t))$ zu schreiben. Die Integrale von $\sin(t)$, $\cos(t)$ und $\cos(3t)$ über $[0,\pi]$ verschwinden alle.

**(d)** Laut dem Satz von Gauss, siehe Satz 6.42 (Gauß) in den Notizen von Dr. Ziltener, gilt
$$\int_{\partial U,\nu} X\cdot d\mathbf{A} = \int_U \nabla\cdot X\, dx.$$
Wir haben $\nabla\cdot X$ bereits berechnet und finden
$$\int_U \nabla\cdot X\, dx = \int_{B_2^2\setminus\overline{B}_1^2} (2x_1 + 2x_2)\, dx = 0.$$
Wobei das Verschwinden des letzten Integrals mittels Symmetrie-Argumenten folgt, oder mittels Polarkoordinaten:
$$\int_{B_2^2\setminus\overline{B}_1^2} (2x_1 + 2x_2)\, dx = \int_1^2\int_0^{2\pi} (2r^2\cos(\phi) + 2r^2\sin(\phi))\, d\phi dr = 0,$$
da die Integrale von Sinus und Cosinus über $[0, 2\pi]$ verschwinden.

### 14.4. Vektoranalytische Identitäten.

Die Identitäten lassen sich alle durch direktes Rechnen bestimmen, wobei jeweils die Reihenfolge partieller Differentiation vertauscht werden darf (Satz von Schwarz). Wir schreiben einfachheitshalber $\partial_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, \partial_2 = \frac{\partial}{\partial x_2}, \partial_3 = \frac{\partial}{\partial x_3}$.

**(a)**

$$\nabla \times (\nabla f) = \nabla \times \begin{pmatrix} \partial_1 f \\ \partial_2 f \\ \partial_3 f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_2\partial_3 f - \partial_3\partial_2 f \\ \partial_3\partial_1 f - \partial_1\partial_3 f \\ \partial_1\partial_2 f - \partial_2\partial_1 f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

**(b)**

$$\nabla \cdot (\nabla f) = \nabla \cdot \begin{pmatrix} \partial_1 f \\ \partial_2 f \\ \partial_3 f \end{pmatrix} = \partial_1\partial_1 f + \partial_2\partial_2 f + \partial_3\partial_3 f = \Delta f$$

**(c)**

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\nabla \times X) &= \nabla \cdot \begin{pmatrix} \partial_2 X^3 - \partial_3 X^2 \\ \partial_3 X^1 - \partial_1 X^3 \\ \partial_1 X^2 - \partial_2 X^1 \end{pmatrix} \\ &= \partial_1(\partial_2 X^3 - \partial_3 X^2) + \partial_2(\partial_3 X^1 - \partial_1 X^3) + \partial_3(\partial_1 X^2 - \partial_2 X^1) = 0 \end{aligned}$$

**(d)** Wir berechnen beide Seiten separat:

$$\nabla \times (\nabla \times X) = \nabla \times \begin{pmatrix} \partial_2 X^3 - \partial_3 X^2 \\ \partial_3 X^1 - \partial_1 X^3 \\ \partial_1 X^2 - \partial_2 X^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_2(\partial_1 X^2 - \partial_2 X^1) - \partial_3(\partial_3 X^1 - \partial_1 X^3) \\ \partial_3(\partial_2 X^3 - \partial_3 X^2) - \partial_1(\partial_1 X^2 - \partial_2 X^1) \\ \partial_1(\partial_3 X^1 - \partial_1 X^3) - \partial_2(\partial_2 X^3 - \partial_3 X^2) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \nabla(\nabla \cdot X) - \Delta X &= \nabla(\partial_1 X^1 + \partial_2 X^2 + \partial_3 X^3) - (\partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2) \begin{pmatrix} X^1 \\ X^2 \\ X_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \partial_1(\partial_1 X^1 + \partial_2 X^2 + \partial_3 X^3) \\ \partial_2(\partial_1 X^1 + \partial_2 X^2 + \partial_3 X^3) \\ \partial_3(\partial_1 X^1 + \partial_2 X^2 + \partial_3 X^3) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \partial_1^2 X^1 + \partial_2^2 X^1 + \partial_3^2 X^1 \\ \partial_1^2 X^2 + \partial_2^2 X^2 + \partial_3^2 X^2 \\ \partial_1^2 X^3 + \partial_2^2 X^3 + \partial_3^2 X^3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \partial_1\partial_2 X^2 + \partial_1\partial_3 X^3 - \partial_2^2 X^1 - \partial_3^2 X^1 \\ \partial_2\partial_1 X^1 + \partial_2\partial_3 X^3 - \partial_1^2 X^2 - \partial_3^2 X^2 \\ \partial_3\partial_1 X^1 + \partial_3\partial_2 X^2 - \partial_1^2 X^3 - \partial_2^2 X^3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Durch Vergleichen sehen wir, dass beide Seiten gleich sind.

**14.5. Faradaysche Gesetz der Induktion und Maxwell-Gleichung.**

Dies folgt aus dem Satz von Stokes. Wir nehmen an, dass das elektrische und das magnetische Feld Funktionen der Klasse $C^1$ sind:

$$E, B : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3.$$

Die zeitliche Veränderung des Flusses von $B$ durch $\Sigma$ ist

$$\frac{d}{dt} \int_{\Sigma,\nu} B \cdot d\mathbf{A}.$$

Die Zirkulation von $E$ durch $\partial\Sigma$ ist gegeben durch das Kurvenintegral

$$\int_{\partial\Sigma,T} E \cdot d\mathbf{s}.$$

Das Faradaysche Gesetz der Induktion besagt also

$$\frac{d}{dt} \int_{\Sigma,\nu} B \cdot d\mathbf{A} = - \int_{\partial\Sigma,T} E \cdot d\mathbf{s}.$$

Dank dem Satz von Stokes gilt

$$\int_{\partial\Sigma,T} E \cdot d\mathbf{s} = \int_{\Sigma,\nu} (\nabla \times E) \cdot d\mathbf{A}.$$

Des Weiteren können wir für das magnetische Feld die zeitliche Ableitung mit dem Integral über $\Sigma$ vertauschen. Wir finden also

$$\int_{\Sigma,\nu} \frac{\partial B}{\partial t} \cdot d\mathbf{A} = - \int_{\Sigma,\nu} (\nabla \times E) \cdot d\mathbf{A}.$$

Da dies für jede Fläche $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$, müssen die Integranden gleich sein, also

$$\frac{\partial B}{\partial t} = -\nabla \times E.$$

**14.6. Coulomb-Gesetz.**

Der Einheitsvektor, der von $x_0$ nach $x$ zeigt ist $\frac{x-x_0}{\|x-x_0\|}$. Prinzip (i) impliziert also, dass es eine Funktion $\Phi : \{(x_0, x) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \,|\, x \neq x_0\} \to \mathbb{R}$ gibt (die beiden Ladungen sollten nicht am selben Punkt sein), sodass

$$F = Qq\Phi(x, x_0)\frac{x - x_0}{\|x - x_0\|}.$$

Prinzip (iii) impliziert, dass für alle Vektoren $V \in \mathbb{R}^3$ gilt

$$\Phi(x+v, x_0+v) = \Phi(x, x_0).$$

Somit gilt

$$\Phi(x, x_0) = \Phi(x - x_0, 0) = \phi(x - x_0),$$

für eine Funktion $\phi : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$. Die Invarianz unter Rotationen, Prinzip (iv), impliziert, dass die Funktion $\phi$ nur von der Norm des Vektors abhängen kann, also $\phi(x - x_0) = f(\|x - x_0\|)$ für eine Funktion $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$. Wir können also die Kraft wie folgt schreiben:

$$F = Qqf(\|x - x_0\|)\frac{x - x_0}{\|x - x_0\|}.$$

Wir bestimmen nun die Form der Funktion $f$ mittels dem Satz von Gauss und Prinzip (ii). Wegen der Translationsinvarianz können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $x_0 = 0$, also die Ladung $Q$ liegt im Ursprung. Sei $r > 0$ beliebig. Wir berechnen den Fluss von $F$ durch die Kugeloberfläche $\partial B_r^3$, wobei wir als Koorientierung $\nu(x) = \frac{x}{\|x\|}$ verwenden:

$$\int_{\partial B_r^3, \nu} F \cdot d\mathbf{A} = Qq \int_{\partial B_r^3} f(\|x\|)\frac{x}{\|x\|} \cdot \frac{x}{\|x\|}\, dA = Qqf(r) \int_{\partial B_r^3} 1\, dA = 4\pi Qqr^2 f(r),$$

wobei wir verwendet haben, dass $f$ entalang der Kugeloberfläche konstant ist und der Flächeninhalt gegeben ist durch $4\pi r^2$. Wir betrachten nun das Gebiet $U = B_{r_2}^3 \setminus \overline{B}_{r_1}^3$, wobei $0 < r_1 < r_2$. Der Punkt $x_0 = 0$ liegt nicht in $U$, also besagt Prinzip (ii), dass $\nabla \cdot X = 0$ überall in $U$. Der Rand von $U$ ist gegeben durch die beiden Kugeloberflächen $\partial B_{r_1}^3$ und $\partial B_{r_2}^3$, wobei $\nu$ die induzierte Koorientierung auf $\partial B_{r_2}^3$ ist und $-\nu$ auf $\partial B_{r_1}^3$. Somit gilt laut dem Satz von Gauss:

$$0 = \int_U \nabla \cdot F\, dx = \int_{\partial B_{r_2}^3, \nu} F \cdot d\mathbf{A} - \int_{\partial B_{r_2}^3, \nu} F \cdot d\mathbf{A} = 4\pi Qq(r_2^2 f(r_2) - r_1^2 f(r_1)).$$

Für beliebige $r_1, r_2$ muss also gelten

$$r_1^2 f(r_1) = r_2^2 f(r_2).$$

Somit finden wir

$$f(r) = \frac{f(1)}{r^2},$$

wobei $f(1)$ irgendeine Konstante ist. Eingesetzt in unsere Formel für $F$ ergibt dies:

$$F = f(1)Qq\frac{x - x_0}{\|x - x_0\|^2},$$

und für den Betrag der Kraft:

$$\|F\| = \frac{|f(1)Qq|}{\|x - x_0\|^2}.$$

**Bemerkung:** Die Konstante wird geschrieben als $f(1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$, wobei $\epsilon_0$ die sogenannte elektrische Feldkonstante ist.