Die folgende Aufgabe dient der Repetition von Stoff aus Analysis 1.

1.1. Partielle Integration

Lösen Sie die folgenden Integrale mit Hilfe von partieller Integration.

(a) $\int_{-\pi}^{\pi} 4x\cos(2-3x)\,dx$,

(b) $\int_6^0 (2+5x)e^{\frac{1}{3}x}\,dx$,

(c) $\int_{-\pi}^{\pi} (3x+x^2)\sin(2x)\,dx$.

Die folgende Aufgabe dient der Repetition von Stoff aus Analysis 1.

1.2. Variation der Konstanten

Lösen Sie die folgenden gewöhnlichen Differentialgleichungen (GDG), indem Sie zuerst eine Lösung der entsprechenden homogenen Gleichung finden und dann Variation der Konstanten anwenden.

(a) $y' - 3y = e^{5x}$,

(b) $y' - 3y = e^{3x}$,

(c) $y' - y = \sin x$,

1.3. Homogene Differentialgleichungen

Bestimmen Sie die allgemeinen Lösungen der folgenden gewöhnlichen Differentialgleichungen:

(a) $y'' + y' - 2y = 0$;

(b) $y^{(4)} - 4y'' = 0$.

(c) $y^{(4)} - 10y^{(3)} + 33y'' - 40y' + 16y = 0$

Hinweis: Verwenden Sie einen Satz aus der Vorlesung, der eine Basis für den Lösungsraum einer homogenen linearen GDG mit konstanten Koeffizienten angibt.

1.4. Federschwinger

In der Vorlesung wurde der freie gedämpfte Federschwinger (= Federpendel) als ein Beispiel eines mechanischen Systems besprochen, das durch eine gewöhnliche Differentialgleichung beschrieben werden kann. Damit meinen wir das mechanische System, das aus einem kugelförmigen Körper besteht, der über eine horizontale Feder an einer ruhenden Wand befestigt ist und in einer zähen Flüssigkeit liegt. Aufgrund von Viskosiät (= innere Reibung) übt die Flüssigkeit eine Kraft auf den Körper aus, welche seine Bewegung dämpft. Das Ziel dieser Aufgabe ist es, sich die in der Vorlesung hergeleitete GDG nochmals zu überlegen und sie zu lösen. Wir verwenden die folgenden Notationen:

$t :=$ Zeit

$x(t) :=$ Auslenkung des Körpers aus der Ruhelage zur Zeit t (= gesuchte Grösse)

$F_0 :=$ Rückstellkraft der Feder

$F_R :=$ durch die Viskosität der Flüssigkeit verursachte Reibungskraft

$F :=$ gesamte auf den Körper einwirkende Kraft

$k :=$ Federkonstante

$c :=$ Dämpfungskonstante

$m :=$ Masse des Körpers

Es gelten die folgenden Gesetze der Mechanik und der Strömungslehre:

- Hookesches Gesetz:

  $$F_0 = -kx$$

  Das bedeutet, dass der Körper durch die Feder mit einer Kraft in die Ruhelage zurückgezogen wird, die proportional zu seiner Auslenkung ist und in Richtung der Ruhelage zeigt.

- Stokessches Reibungsgesetz:

  $$F_R = -c\dot{x}$$

  Das bedeutet, dass die Reibungskraft der Flüssigkeit proportional und entgegengesetzt zur Geschwindigkeit des Körpers ist.

- zweites Newtonsches Gesetz:

  $$F = m\ddot{x}.$$

(a) Wir definieren die *Dämpfungskonstante* als

$$\delta := \frac{c}{2m}$$

und die *Kreisfrequenz des ungedämpften Systems* als

$$\omega_0 := \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Stellen Sie mittels der obigen Gesetze eine GDG für die Auslenkung x auf.

(b) Da die Reibung der Bewegung entgegengerichtet ist, haben wir $c \geq 0$, d. h. $\delta \geq 0$. Nehmen Sie an, dass $\delta \neq \omega_0$. (Das garantiert, dass es zwei linear unabhängige Lösungen der GDG gibt, die beide Exponentialfunktionen sind.) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der gefundenen GDG.

Hinweis: Unterscheiden Sie die folgenden Fälle:

a) $\delta < \omega_0$ (unterkritische Dämpfung)

b) $\delta > \omega_0$ (überkritische Dämpfung)

(c) In welchen Fällen oszilliert die Lösung?

Wie verhält sich $x(t)$ asymptotisch für $t \to \infty$? (Treffen Sie hier die Unterscheidung $\delta > 0$ und $\delta = 0$ (keine Dämpfung).)

Deckt sich dies mit Ihrer physikalischen Intuition?

Hinweis: Es kann hilfreich sein, die Funktionen zu plotten oder zu skizzieren.

Bemerkung: Die GDG, die den gedämpften Federschwinger beschreibt, wird auch in der Vorlesung in einer Proposition behandelt (allgemeine Lösung der homogenen GDG zweiter Ordnung, freie gedämpfte Schwingung). In den Notizen zur Vorlesung können Sie auch Graphiken finden, die die Lösungen darstellen.

Die folgenden zwei Aufgaben sind Zusatzaufgaben, um den Stoff aus der Vorlesung Lineare Algebra *zu repetieren.*

1.5. Vektorraum über $\mathbb{R}$

Überprüfen Sie, dass $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ und $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ Vektorräume über $\mathbb{R}$ sind.

Hinweis: Erinnern Sie sich an die Definition eines Vektorraums:

Ein *Vektorraum über* $\mathbb{R}$ ist ein Tripel $\big(X, +, \cdot\big)$, wo X eine Menge ist, und

$$+ : X \times X \to X, \quad \cdot : \mathbb{R} \times X \to X$$

sind Abbildungen, sodass die folgenden Bedingungen gelten:

1. $(X, +)$ ist eine abelsche Gruppe. Das heisst:
   a) $(X, +)$ ist assoziativ, also
   $$(x + y) + z = x + (y + z), \quad \forall x, y, z \in X.$$
   b) Es existiert ein Element $0_X \in X$, sodass
   $$0_X + x = x + 0_X = x, \quad \forall x \in X.$$
   0_X wird Identitätselement der abelschen Gruppe $(X, +)$ genannt.
   c) Für alle $x \in X$ existiert ein $y \in X$, sodass
   $$x + y = 0_X.$$
   Das Element $y \in X$ wird das Inverse zu x genannt.
   d) $(X, +)$ ist abelsch (oder kommutativ), also
   $$x + y = y + x, \quad \forall x, y \in X.$$
2. Die Multiplikation in $\mathbb{R}$ ist kompatibel mit der Skalarmultiplikation, das heisst
   $$(ab) \cdot x = a \cdot (b \cdot x), \quad \forall a, b \in \mathbb{R},\, x \in X.$$
3. Die Skalarmultiplikation mit 1 ist trivial, das heisst
   $$1 \cdot x = x, \quad \forall x \in X.$$

4. Die Distributivität gilt, das heisst

$$\begin{aligned}(a+b)\cdot x &= a\cdot x + b\cdot x,\\ a\cdot(x+y) &= a\cdot x + a\cdot y,\end{aligned}$$

für alle $a, b \in \mathbb{R}$, $x, y \in X$.

In der Vorlesung wird die Tatsache behandelt, dass der Lösungsraum einer homogenen linearen gewöhnlichen Differentialgleichung ein Vektorraum ist. Der Grund dafür ist, dass dieser Raum ein linearer Unterraum des Vektorraums aller Funktionen ist. Dass die Funktionen einen Vektorraum formen, ist die Aussage der nächsten Aufgabe.

1.6. Vektorraum von Funktionen

Sei S eine Menge, und sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass

$$V^S = \{f : S \to V \text{ ist eine Abbildung}\},$$

die Menge aller Funktionen von S nach V, zusammen mit der punktweise Addition and Skalarmultiplikation ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ ist.

Hinweis: Mit punktweiser Addition and Skalarmultiplikation werden die folgenden Abbildungen gemeint:

$$\begin{aligned}+ : V^S \times V^S \to V^S, &\quad (f+g)(s) := f(s) + g(s),\\ \cdot : \mathbb{R} \times V^S \to V^S, &\quad (a\cdot f)(s) := a\cdot(f(s)),\end{aligned}$$

wobei auf der rechten Seite der Gleichungen die Addition und Skalarmultiplikation im Vektorraum V verwendet wird.

Bemerkung. *Falls Ihnen lieber ist, können Sie die Übung nur für den Fall $V = \mathbb{R}$ lösen.*

Bemerkung. *Motivation für die Notation B^A: Angenommen A and B sind endliche Mengen. Wir schreiben $|A|$ für die Kardinalität (= Anzahl Elemente) von A. Dann gilt*

$$\left|B^A\right| = |B|^{|A|},$$

also die Anzahl Funktionen von A nach B ist gleich der Anzahl Elemente von B hoch die Anzahl Elemente von A.

1.7. Online-Aufgaben

Abgabe der Multiple-Choice Aufgaben: Online auf Moodle.

Es sind jeweils mehrere Antworten möglich.

(a) Betrachten Sie die folgende Differentialgleichung:

$$y'' + y = 0$$

Der Exponentialansatz liefert die folgenden Lösungen:

(i) e^{it}, e^{-it}

(ii) e^{t}, e^{-t}

(iii) $\cos(t), \sin(t)$

(iv) $\cosh(t), \sinh(t)$

(b) Betrachten Sie die folgende Differentialgleichung:

$$y'' - y = 0$$

Der Exponentialansatz liefert die folgenden Lösungen:

(i) e^{it}, e^{-it}

(ii) e^{t}, e^{-t}

(iii) $\cos(t), \sin(t)$

(iv) $\cosh(t), \sinh(t)$

(c) Betrachten Sie die folgende Differentialgleichung:

$$y'' + 2y' + y = 0$$

Der Exponentialansatz liefert die folgenden Lösungen:

(i) e^{-t}, aber te^{-t} ist auch eine Lösung.

(ii) e^{t}, aber te^{t} ist auch eine Lösung.

(iii) e^{t}, e^{-t}

(iv) e^{t} ist die einzige Lösung bis auf Multiplikation mit einer Konstanten.