### 3.1. Existenz und Eindeutigkeit der Lösung des Anfangswertproblems für eine gewöhnliche Differentialgleichung

1. Besitzt das Anfangswertproblem

$$\ddot{f}(t) = t f(t),\ \forall t \in \mathbb{R}, \qquad f(0) = 1, \qquad \dot{f}(0) = 0$$

   eine Lösung?

2. Ist die Lösung eindeutig (falls sie existiert)?

Begründen Sie Ihre Antworten in einem Satz.

*Die folgende Aufgabe wurde schon in Serie 2 gestellt. Inzwischen haben wir den dazu benötigten Stoff behandelt.*

### 3.2. Fundamentallösungen für $2 \times 2$-Matrizen, Anfangswertproblem

1. Bestimmen Sie für die folgenden Matrizen die Fundamentallösung der Differentialgleichung für stetig differenzierbares $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$:

$$\frac{dF(t)}{dt} = AF(t)$$

**(a)** $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$ **(c)** $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$

**(b)** $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$ **(d)** $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$

2. Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\dot{F} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} F, \qquad F(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

### 3.3. Konvergenz einer Folge von Punkten in $\mathbb{R}^2$

Bestimmen Sie für jede der Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^2$:

1. ob die Folge konvergiert,
2. den Grenzwert im Fall von Konvergenz,
3. alle Häufungspunkte.

**(a)** $a_n := \left(\frac{1}{n}, \frac{(-1)^n}{n}\right)$

**(b)** $a_n := \left(\frac{1}{n}, (-1)^n\right)$

**(c)** $a_n := \left(\sin\left(n \cdot \frac{\pi}{4}\right), \frac{1}{n+1}\right)$

### 3.4. Abschluss

Bestimmen Sie für jede der unteren Mengen $Y$ den Abschluss:

**(a)** $Y := ]0,1]$

**(b)** $Y := \mathbb{R} \setminus \{0\}$

**(c)** $Y := \left\{\frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}$

**(d)** $Y := \emptyset$

**(e)** $Y := \mathbb{Q}$

**(f)** $Y := \left\{\left(\frac{1}{n}, (-1)^n\right) \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}$

### 3.5. Grenzwert einer Funktion an einer Stelle

Bestimmen Sie für jede Funktion das Folgende:

1. ob sie bei der Stelle $x_0$ konvergiert (also existiert der Grenzwert $\lim_{x\to x_0} f(x)$),
2. den Grenzwert im Fall von Konvergenz,
3. ob die Funktion an der angegebenen Stelle $x_0$ stetig ist im Fall, dass die Funktion in diesem Punkt definiert ist.

**(a)**

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \begin{cases} x, & \text{falls } x > 0, \\ 1, & \text{sonst,} \end{cases} \qquad , \qquad x_0 := 1$$

**(b)** halbe Buckelfunktion:

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad g(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & \text{falls } x > 0, \\ 0, & \text{falls } x \leq 0 \end{cases} \qquad , \qquad x_0 := 0$$

**(c)**

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & \text{falls } x > 0, \\ 0, & \text{falls } x < 0 \end{cases} \qquad , \qquad x_0 := 0$$

**(d)** Vorzeichenfunktion = Signumfunktion:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \operatorname{sign}(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x > 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0, \\ -1, & \text{falls } x < 0. \end{cases}, \qquad x_0 := 0$$

**(e)**

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := (x_1 - 1)^2 + x_2^2, \qquad x_0 := (1, 0)$$

Für $i = 1, 2$ bezeichnet hier $x_i$ die $i$-te Koordinate von $x$.

**(f)** $g \circ f$, wobei $f$ wie in (b) und $g$ wie in (e) definiert sind, $x_0 := (1, 0)$

**Tipp:** Verwenden Sie einen Satz aus der Vorlesung.

### 3.6. Kompaktheit

Bestimmen Sie für jede Menge, ob sie kompakt ist:

**(a)** $[0, 1]$

**(b)** $[0, 1[$

**(c)** $\emptyset$

**(d)** $\mathbb{Z}$

**(e)** $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$

**(f)** Abgeschlossener Einheitsball in $\mathbb{R}^2$, d. h. $\left\{x \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \|x\| \leq 1\right\}$

### 3.7. Online-Aufgaben

**Abgabe der Multiple-Choice Aufgaben:** Online via Moodle.

**Es sind jeweils mehrere Antworten möglich.**

**(a)** Sei

$$A := \left\{1 - \frac{1}{n^2} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\} \subset \mathbb{R}.$$

Bestimmen Sie $\overline{A}$ (Abschluss von $A$ in $\mathbb{R}$).

**(i)** $\overline{A} = \mathbb{R}$

**(ii)** $\overline{A} = A$

**(iii)** $\overline{A} = A \cup \{1\}$

**(iv)** $\overline{A} = [0, 1]$

**(b)** Sei

$$A := \mathbb{R}^2 \setminus \left\{\left(0, \frac{1}{n}\right) \,\middle|\, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\right\}.$$

Bestimmen Sie $\overline{A}$ (Abschluss von $A$ in $\mathbb{R}^2$).

**(i)** $\overline{A} = \mathbb{R}^2$

**(ii)** $\overline{A} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

**(iii)** $\overline{A} = A$

**(c)** Sei

$$A := \mathbb{R}^2 \setminus \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, |y| \leq x^3\right\}.$$

Bestimmen Sie $\overline{A}$ (Abschluss von $A$ in $\mathbb{R}^2$).

**(i)** $\overline{A} = \mathbb{R}^2$

**(ii)** $\overline{A} = \mathbb{R}^2 \setminus \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, |y| < x^3\right\}$

**(iii)** $\overline{A} = A$

**(iv)** $\overline{A} = A \cup \{(0,0)\}$