4.1. Inneres

Bestimmen Sie für jede der unteren Mengen Y das Innere:

(a) $Y :=]0,1]$

(b) $Y := \mathbb{R} \setminus \{0\}$

(c) $Y := \left\{ \frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$

(d) $Y := \emptyset$

(e) $Y := \mathbb{Q}$

(f) Abgeschlossener Ball $Y := \overline{B}_r^d(x_0)$ für $d \in \mathbb{N}$, $x_0 \in \mathbb{R}^d$, $r \in (0,\infty)$

(g) "Abgeschlossener Halbmond" $Y := \overline{B}_1^2(0) \cap \big([0,\infty) \times \mathbb{R}\big)$

4.2. Abgeschlossener Ball ist abgeschlossen

Zeigen Sie, dass jeder abgeschlossene Ball abgeschlossen ist.

Tipps:

- Machen Sie eine Zeichnung.
- Verwenden Sie die Dreiecksungleichung für die euklidische Norm.

Die folgende Aufgabe werden wir verwenden, um Aufgabe 4 zu lösen.

4.3. De Morgansche Regeln

Für jede Kollektion (= Menge) $\mathcal{A}$ von Mengen schreiben wir

$$\bigcap \mathcal{A} := \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A, \qquad \bigcup \mathcal{A} := \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$$

für den Durchschnitt und die Vereinigung aller Mengen in $\mathcal{A}$. Wenn zum Beispiel $\mathcal{A}$ aus zwei Mengen A und B besteht, also $\mathcal{A} = \{A, B\}$, dann ist

$$\bigcap \{A, B\} = A \cap B, \qquad \bigcup \{A, B\} = A \cup B.$$

(Wenn $(A_i)_{i \in I}$ eine indizierte Familie von Menge ist und $\mathcal{A} := \left\{ A_i \,\middle|\, i \in I \right\}$, dann gilt

$$\bigcap \mathcal{A} = \bigcap_{i \in I} A_i, \qquad \bigcup \mathcal{A} = \bigcup_{i \in I} A_i.)$$

Zeigen Sie die De Morganschen Regeln, welche das Folgende besagen:

1. Das Komplement eines Durchschnittes von Mengen ist gleich der Vereinigung der Komplemente der Mengen. Bedeutung: Seien X eine Menge und $\mathcal{A}$ eine Kollektion von Teilmengen von X. Dann gilt

$$\left(\bigcap \mathcal{A}\right)^c = \bigcup_{A\in\mathcal{A}} (A^c)\,, \qquad A^c := X \setminus A.$$

2. Das Komplement einer Vereinigung von Mengen ist gleich dem Durchschnitt der Komplemente der Mengen. Bedeutung: Seien X eine Menge und $\mathcal{A}$ eine Kollektion von Teilmengen von X. Dann gilt

$$\left(\bigcup \mathcal{A}\right)^c = \bigcap_{A\in\mathcal{A}} (A^c)\,.$$

Tipp: Schreiben Sie die Mengen unter Verwendung von Quantoren und der Negation. Verwenden Sie die Regeln für logische Aussagen und Quantoren aus Analysis I, insbesondere die Regeln für die Negation.

Die folgende Aufgabe ist Teil der Aussage eines Korollars in der Vorlesung (Eigenschaften abgeschlossener Mengen).

4.4. Eigenschaften abgeschlossener Mengen

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

1. $\emptyset$ und $\mathbb{R}^d$ sind abgeschlossen in $\mathbb{R}^d$.
2. Jeder Durchschnitt abgeschlossener Mengen [1] ist abgeschlossen.

Tipp: Verwenden Sie einen Satz aus der Vorlesung (Eigenschaften offener Mengen) sowie Aufgabe 3.

4.5. Rand

Bestimmen Sie für jede der Mengen in Aufgabe 1 ihren Rand.

Tipps:

- Verwenden Sie eine Aufgabe in Serie 3 (Abschluss).
- Um den Rand des abgeschlossenen Balles und des "abgeschlossenen Halbmondes" zu bestimmen, zeigen und verwenden Sie, dass diese Mengen abgeschlossen sind.

[1] Damit meinen wir den Durchschnitt einer beliebigen nicht leeren Kollektion (=Menge) von abgeschlossenen Mengen. Diese Kollektion kann unendlich viele Elemente besitzen.

4.6. Mittels (Un-)gleichungen definierte Mengen

(a) Zeigen Sie, dass die Menge

$$\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x^2 + e^x < 2\right\}$$

offen ist.

(b) Zeigen Sie, dass die folgenden Mengen abgeschlossen sind:

$$A := \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x^2 + e^x \leq 2\right\}$$
$$B := \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x^2 + e^x = 2\right\}$$
$$C := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^4 + x + y^4 + y = 1\right\}$$

(c) Zeigen Sie, dass A, B und C kompakt sind.

(d) Ist die Menge

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^3 + x + y^3 + y = 1\right\}$$

kompakt?

Tipp: für (a) und (b): Verwenden Sie einen Satz aus der Vorlesung (Charakterisierung von Stetigkeit mittels offener und abgeschlossener Mengen).

Tipp: für (c) und (d): Verwenden Sie einen Satz aus der Vorlesung (Charakterisierung von Kompaktheit).

4.7. Maximum und Minimum Wir definieren

$$f : \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x^2 + e^x \leq 2\right\} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := x^3 + x.$$

Zeigen Sie, dass f ein Maximum und ein Minimum besitzt.

Tipp: Verwenden Sie Aufgabe 6(c) und ein Korollar aus der Vorlesung über eine stetige Funktion auf einer kompakten Menge.

4.8. Online-Aufgaben

Abgabe der Multiple-Choice Aufgaben: Online auf Moodle.

Es sind jeweils mehrere Antworten möglich.

(a) Es seien $A_1, A_2 \subset \mathbb{R}^2$. Gilt die folgende Inklusion?

$$\overline{A_1 \cup A_2} \subset \overline{A_1} \cup \overline{A_2}$$

(i) Ja.

(ii) Nein.

(b) Es seien $A_1, A_2 \subset \mathbb{R}^2$. Gilt die folgende Inklusion?

$$\overline{A_1 \cup A_2} \supset \overline{A_1} \cup \overline{A_2}$$

(i) Ja.

(ii) Nein.

(c) Es seien $A_1, A_2 \subset \mathbb{R}^2$. Gilt die folgende Inklusion?

$$\overline{A_1 \cap A_2} \subset \overline{A_1} \cap \overline{A_2}$$

(i) Ja.

(ii) Nein.

(d) Es seien $A_1, A_2 \subset \mathbb{R}^2$. Gilt die folgende Inklusion?

$$\overline{A_1 \cap A_2} \supset \overline{A_1} \cap \overline{A_2}$$

(i) Ja.

(ii) Nein.