6.1. Wegintegral eines Vektorfeldes.

Wir definieren das *Euler-Vektorfeld auf* $\mathbb{R}^2$ als die Identitätsabbildung

$$X := \mathrm{id} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad \mathrm{id}(x) := x.$$

Wir betrachten den Weg in $\mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \qquad \gamma(t) := (\cos t, \sin t).$$

(a) Zeichnen Sie X und γ.

(b) Berechnen Sie $\int X \cdot d\gamma$, das Wegintegral von X längs γ.

6.2. Konservativität eines Vektorfeldes, Potential.

Tun Sie für jedes der unteren Vektorfelder X das Folgende:

(i) X zeichnen,

(ii) die Funktion

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \int X \cdot d\gamma_x$$

berechnen, wobei

$$x_0 := 0, \qquad \gamma_x : [0,1] \to \mathbb{R}^n, \qquad \gamma_x(t) := (1-t)x_0 + tx = tx.$$

(iii) das Gradientenfeld ∇f berechnen,

(iv) Entscheiden, ob f ein Potential für X ist und ob X konservativ ist. Begründen Sie Ihre Entscheidung.

(a) $X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad X(x) := \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$

(b) $X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad X(x) := \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$

(c) $X : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad X(x) := \begin{pmatrix} x_2 x_3 \\ x_3 x_1 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix}$

Tipp: Verwenden Sie einen Satz aus der Vorlesung (Potentiale eines konservativen Vektorfeldes).

Die nächste Aufgabe werden wir in Aufgabe 4 verwenden.

6.3. Einfacher Zusammenhang, Sternförmigkeit und Konvexität einer Teilmenge von $\mathbb{R}^n$.

Eine Teilmenge $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ heisst *sternförmig* g. d. w. es einen Punkt $x_0 \in \Omega$ gibt, sodass für jeden Punkt $x \in \Omega$ und jedes $t \in [0,1]$ der Punkt $(1-t)x_0 + tx$ in Ω liegt.

(a) Zeichnen Sie eine sternförmige Menge.

(b) Zeigen Sie, dass jede konvexe Menge sternförmig ist.

(c) Zeichnen Sie eine sternförmige Menge, die nicht konvex ist. Erklären Sie, warum die Menge sternförmig, aber nicht konvex ist.

(d) Zeigen Sie, dass jede sternförmige Menge einfach zusammenhängend ist.

(e) Überlegen Sie sich auf anschauliche Weise, dass die Menge $\Omega := \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ einfach zusammenhängend ist.

(f) (schwierig:) Beweisen Sie, dass $\Omega := \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ einfach zusammenhängend ist.

Bemerkung: Sie dürfen die folgende Tatsache ohne Beweis verwenden. Wir bezeichnen mit $S^1 := S^1_1(0)$ den Einheitskreis (=Rand der Einheitskreisscheibe). Für jede stetige Abbildung $\gamma : S^1 \to \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ gibt es eine stetige Abbildung $h : [0,1] \times S^1 \to \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, sodass

$$h(0,y) = \gamma(y),\ \forall y \in S^1, \qquad \big(h^1(1,y), h^2(1,y)\big) \neq (0,0),\ \forall y \in S^1.$$

Bemerkung: Im Gegensatz zu dieser Teilaufgabe ist die Menge $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ **nicht** einfach zusammenhängend.

6.4. Charakterisierung der Konservativität eines Vektorfeldes mittels partieller Ableitungen.

Tun Sie für jedes der unteren Vektorfelder das Folgende:

(i) Überprüfen, ob für jedes Paar von Indizes $i, j = 1, \ldots, n$ gilt (mit $D_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$):

$$D_i X^j = D_j X^i.$$

(ii) Entscheiden, ob das Vektorfeld konservativ ist. Begründen Sie Ihre Entscheidung, indem Sie Teilschritt (i) und möglicherweise Aufgabe 6.3 verwenden.

Tipp: Verwenden Sie auch einen Satz aus der Vorlesung (Charakterisierung der Konservativität mittels partieller Ableitungen, Integrabilitätsbedingung).

(iii) Mit Aufgabe 2 vergleichen (falls möglich).

(a) $X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad X(x) := \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$

(b) $X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad X(x) := \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$

(c) $X : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad X(x) := \begin{pmatrix} x_2 x_3 \\ x_3 x_1 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix}$

(d) $X : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad X(x) := v \times x,$ wobei $v \in \mathbb{R}^3$ ein fester Vektor ist.

6.5. Rotation eines Vektorfeldes.

Tun Sie für jedes der unteren Vektorfelder das Folgende:

(i) Rotation berechnen,

(ii) mit Teilschritt (ii) von Aufgabe 6.4 vergleichen.

(a) $X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad X(x) := \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$

(b) $X : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad X(x) := \begin{pmatrix} x_2 x_3 \\ x_3 x_1 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix}$

(c) $X : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad X(x) := v \times x,$ wobei $v \in \mathbb{R}^3$ ein fester Vektor ist.

6.6. Nicht-konservatives Vektorfeld mit verschwindender Rotation auf nicht-einfach zusammenhängendem Gebiet.

Wir betrachten das Vektorfeld

$$X : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2, \qquad X(x) := \frac{1}{\|x\|^2} \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass X nicht konservativ ist.

Tipp: Verwenden Sie einen Satz aus der Vorlesung (Charakterisierung von *konservativ* für ein Vektorfeld mittels Wegintegrale).

(b) Berechnen Sie die (skalare) Rotation von X.

(c) Erklären Sie, warum die erste Teilaufgabe und das Resultat der zweiten Teilaufgabe einander nicht widersprechen.

6.7. Online-MC

Abgabe der Multiple-Choice Aufgaben: Online auf Moodle.

Es sind jeweils mehrere Antworten möglich.

(a) Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

(i) Wenn ein Vektorfeld X ein Potential f besitzt, so ist dieses eindeutig.

(ii) Jedes Vektorfeld X besitzt ein zugehöriges Potential in einer Umgebung jedes Punktes.

(iii) Wenn X kein Potential besitzt, so existiert ein geschlossener Weg γ, d.h. mit gleichem Anfangs- und Endpunkt, sodass $\int X \cdot d\gamma \neq 0$.

(iv) Es seien X_0, X_1 zwei Vektorfelder auf $\mathbb{R}^n$ und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine C^1-Funktion mit $X_1 = X_0 + \nabla f$. Dann gilt für jeden geschlossenen Weg γ: $\int X_1 \cdot d\gamma = \int X_0 \cdot d\gamma$

(b) Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

(i) Das Gradientenfeld ∇f einer C^1-Funktion f zeigt in Richtung des stärksten Anstiegs von f.

(ii) Sei X ein C^1-Vektorfeld auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Falls $D_1 X^2 = D_2 X^1$, so ist X konservativ. ($D_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$)

(c) Sei f eine Funktion auf $\mathbb{R}^2$. Welche der folgenden Aussagen impliziert $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$?

(i) Die partiellen Ableitungen $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ existieren und sind stetig auf $\mathbb{R}^2$.

(ii) Die partiellen Ableitungen $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ existieren, sind stetig auf $\mathbb{R}^2$ und stimmen miteinander überein.

(iii) Die partiellen Ableitungen $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ existieren überall in $\mathbb{R}^2$.

(iv) Die partiellen Ableitungen $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ existieren und sind stetig in $\mathbb{R}^2$.