7.1. Gemischte zweite Ableitungen.

Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x,y) := \exp\left(\frac{\sin(y^2)}{1+y^4}\right).$$

Berechnen Sie

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} f.$$

Tipp: Verwenden Sie einen Satz aus der Vorlesung.

Bemerkung: Sie dürfen verwenden, dass f glatt ist, d. h. beliebig oft stetig differenzierbar.

7.2. Taylor-Polynom.

Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := e^{\|x\|^2}.$$

(a) Berechnen Sie für $k = 0, 1, 2, 3$ und $p = 0 \in \mathbb{R}^n$: $T_k f(\cdot, p)$, das Taylor-Polynom k-ter Ordnung von f um den Punkt p.

(b) Zeigen Sie, dass es eine Konstante $C \in [0, \infty)$ gibt, sodass für alle $x \in \overline{B}_1^n(0)$ gilt

$$\left| f(x) - 1 - \|x\|^2 \right| \leq C\|x\|^3.$$

Tipp: Verwenden Sie einen Satz aus der Vorlesung.

Bemerkung: Sie dürfen verwenden, dass f glatt ist, d. h. beliebig oft stetig partiell differenzierbar.

7.3. Kritischer Punkt, Hesse-Matrix, striktes lokales Minimum/Maximum, Sattelpunkt.

1. Bestimmen Sie für jede der folgenden Funktionen die kritischen Punkte.
2. Bestimmen Sie für jeden kritischen Punkt p der Funktion:
   (i) die Hesse-Matrix in p,
   (ii) ob die Hesse-Matrix in p positiv oder negativ definit ist,
   (iii) ob es sich um eine strikte lokale Minimalstelle / Maximalstelle oder einen Sattelpunkt handelt.

(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x,y) := \frac{x^3}{3} - x + \frac{y^3}{3} - y$

(b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x,y) := x^2 + xy + y^2$

(c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x,y) := xy$

(d) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x,y) := e^{x^2+y^2}$

(e) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x,y) := x^2 + y^4$

(f) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x,y) := x^2 - y^4$

7.4. Online-MC

Abgabe der Multiple-Choice Aufgaben: Online auf Moodle.

Es sind jeweils mehrere Antworten möglich.

(a) Man betrachte die folgende Funktion:

$$f(x, y) := y^2 e^x$$

Man bemerke, dass $(0, 0)$ ein kritischer Punkt ist. Welche Aussage ist hier zutreffend?

(i) Die Hesse-Matrix von f in $(0, 0)$ ist positiv definit.

(ii) Die Hesse-Matrix von f in $(0, 0)$ ist negativ definit.

(iii) Die Hesse-Matrix von f in $(0, 0)$ hat positive und negative Eigenwerte.

(iv) Keine der Aussagen ist korrekt.

(b) Man betrachte die folgende Funktion:

$$f(x, y) := (x^2 + y^2)e^{xy}$$

Man bemerke, dass $(0, 0)$ ein kritischer Punkt ist. Welche Aussage ist hier zutreffend?

(i) Die Hesse-Matrix von f in $(0, 0)$ ist positiv definit.

(ii) Die Hesse-Matrix von f in $(0, 0)$ ist negativ definit.

(iii) Die Hesse-Matrix von f in $(0, 0)$ hat positive und negative Eigenwerte.

(iv) Keine der Aussagen ist korrekt.