9.1. Lösung einer polynomialen Gleichung

Wir betrachten

$$f(x,y) := x + x^6 + y + y^5, \quad (x_0, y_0) := (0,0).$$

(a) Zeigen Sie, dass es offene Intervalle U und V gibt, die x_0 respektive y_0 enthalten, sowie eine glatte Funktion $g : U \to V$, so, dass für jeden Punkt $x \in U$ die Zahl $y = g(x)$ die Gleichung $f(x,y) = 0$ löst und so, dass das die einzige Lösung im Interval V ist.

(b) Berechnen Sie $g'(0)$.

Tipp: Verwenden Sie den Satz über implizite Funktionen.

9.2. Kreis ist eine Untermannigfaltigkeit

Zeigen Sie, dass der Einheitskreis $M := S^1 = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \|x\| = 1 \right\}$ eine glatte Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^2$ der Dimension 1 ist.

Bemerkungen:

1. Verwenden Sie die Definition einer Untermannigfaltigkeit.
2. In der Vorlesung haben wir schon gezeigt, dass die Sphäre S^{n-1} um gewisse Punkte eine glatte Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ der Dimension $n-1$ ist. Es geht jetzt darum, das im Fall $n = 2$ auch noch für die übrigen Punkte zu zeigen.

9.3. Die inverse stereographische Projektion ist eine Einbettung

Sei $n \geq 2$ und sei $\psi : V := \mathbb{R}^{n-1} \to S^{n-1}$ die Inverse zur stereographischen Projektion.

(a) Finden Sie eine Formel für ψ.

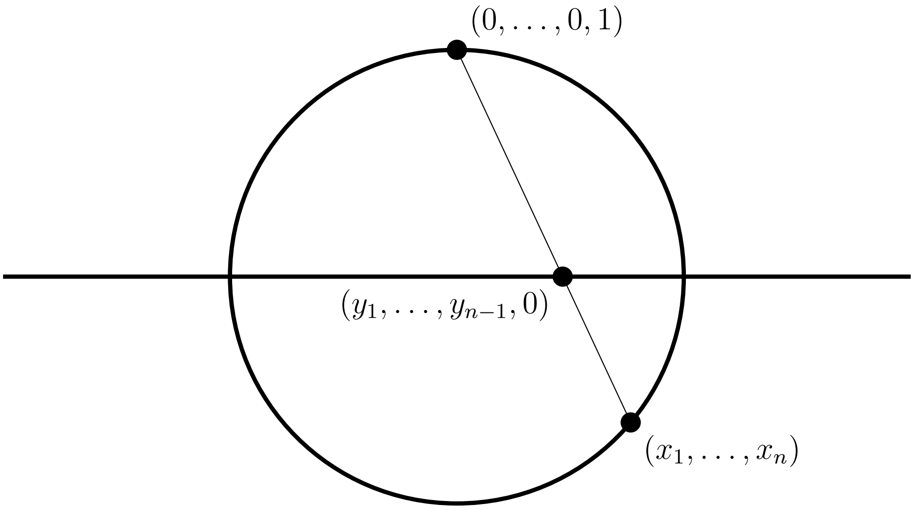
(b) Zeigen Sie, dass ψ eine glatte Einbettung ist.

Bemerkung:

Die stereographische Projektion (bezüglich dem Nordpol) bildet $S^{n-1} \setminus \{0, \dots, 0, 1\}$ auf $\mathbb{R}^{n-1}$ ab. Die Definition ist wie folgt: Wir identifizieren $\mathbb{R}^{n-1}$ mit der Ebene $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^n$. Ein Punkt $x \in S^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$ wird von der stereographischen Projektion auf den Punkt $y \in \mathbb{R}^{n-1}$ abgebildet, wo die Gerade durch $(0, \dots, 0, 1)$ und x die Ebene $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ schneidet.

Umgekehrt bildet die inverse stereographische Projektion ein Punkt $y \in \mathbb{R}^{n-1}$ auf den Punkt $x \in S^{n-1}$ ab, wo die Gerade durch $(0, \dots, 0, 1)$ und $(y, 0)$ die Sphäre $S^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$ schneidet. Die Skizze unten veranschaulicht dies.

Leiten Sie die Formel für die inverse stereographische Projektion durch geometrische Überlegungen her.



9.4. Kurve vierter Ordnung, die eine Untermannigfaltigkeit ist.

Skizzieren Sie die Menge

$$M := \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x_1^4 + x_2^4 = 1 \right\}$$

und zeigen Sie, dass $M \subseteq \mathbb{R}^2$ eine glatte Untermannigfaltigkeit der Dimension 1 ist.

Tipp: Verwenden Sie einen Satz aus der Vorlesung (Satz vom regulären Wert).

9.5. Hyperboloid ist eine Untermannigfaltigkeit

Skizzieren Sie das einschalige Hyperboloid gegeben durch

$$M := \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x_1^2 + x_2^2 = x_3^2 + 1 \right\}$$

und zeigen Sie, dass $M \subseteq \mathbb{R}^3$ eine glatte Untermannigfaltigkeit der Dimension 2 ist.

Tipp: Verwenden Sie einen Satz aus der Vorlesung (Satz vom regulären Wert).

9.6. Tangentialräume einiger Untermannigfaltigkeiten

Betrachten Sie die folgenden Untermannigfaltigkeiten M des Koordinatenraums. Berechnen Sie jeweils in jedem Punkt von M den Tangentialraum an M.

(a) Die Hyperbel

$$M := \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x_1 x_2 = 1 \right\}.$$

(b) Die Kurve

$$M := \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x_1^4 + x_2^4 = 1 \right\}.$$

(c) Das einschalige Hyperboloid

$$M := \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x_1^2 + x_2^2 = x_3^2 + 1 \right\}.$$

Bemerkung: Laut einem Beispiel aus der Vorlesung und Aufgaben 9.4 und den 9.5 sind diese Mengen tatsächlich Untermannigfaltigkeiten.

9.7. Tangentialräume an die logarithmische Spirale, Tangentialabbildung

(a) Skizzieren Sie die logarithmische Spirale

$$M := \left\{ e^y \Big(\cos y, \sin y \Big) \,\middle|\, y \in \mathbb{R} \right\}.$$

(b) Zeigen Sie, dass $M \subseteq \mathbb{R}^2$ eine glatte Untermannigfaltigkeit der Dimension 1 ist und berechnen Sie in jedem Punkt von M den Tangentialraum an M.

(c) Sei $a \in \mathbb{R}$. Wir bezeichnen mit $R_a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Rotation um den Winkel a im Gegenuhrzeigersinn. Zeigen Sie, dass das Bild der Abbildung

$$f : M \to \mathbb{R}^2, \quad f(x) := e^a R_a x,$$

gerade M ist.

(d) Berechnen Sie die Tangentialabbildung (Ableitung) von f im Punkt $x_0 \in M$.

(e) Wie sind die Tangentialräume in zwei Punkten $x_0, x_0' \in M$ miteinander verwandt? Was ist mit dem Fall wenn x_0 und x_0' auf dem Strahl $(0, \infty) \times \{0\}$ liegen?

9.8. Tangentialabbildung der stereographischen Projektion

Berechnen Sie die Tangentialabbildung der stereographischen Projektion

$$S^{n-1} \setminus \Big\{\Big(0, \ldots, 0, 1\Big)\Big\} \to \mathbb{R}^{n-1}$$

in einem Punkt $x_0 \in S^{n-1} \setminus \{(0, \ldots, 0, 1)\}$.

Bemerkung: Siehe Aufgabe 9.3 für die Definition der stereographischen Projektion.

9.9. Extrema

Betrachten Sie die Kurve

$$M := \Big\{x \in \mathbb{R}^2 \,\Big|\, x_1^4 + x_2^4 = 1\Big\}$$

und die Funktion

$$f : M \to \mathbb{R}, \quad f(x) := x_1 + x_2.$$

(a) Beweisen Sie, dass f sein Maximum und Minimum auf M annimmt.

(b) Berechnen Sie das Maximum und Minimum von f auf M.

(c) Skizzieren Sie M und einige Niveaumengen der Funktion f. Vergleichen Sie mit Ihrer Antwort zu (b).