*Aufgaben 12.1 bis 12.4 sind schon in der Serie 11 erschienen.*

**12.1. Volumen eines Simplex (Hypertetraeder).**

**(a)** Skizzieren Sie die Menge

$$\Delta_n := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, x_1, \ldots, x_n \geq 0,\ x_1 + \cdots + x_n \leq 1 \right\}$$

für $n = 1, 2, 3$.

**(b)** Berechnen Sie für $n \in \mathbb{N}$ das Jordan-Mass von $\Delta_n$.

**Tipps:**

- Sie dürfen annehmen, dass $\Delta_n$ Jordan-messbar ist.
- Versuchen Sie das Jordan-Mass von $\Delta_n$ durch das Jordan-Mass von $\Delta_{n-1}$ auszudrücken und argumentieren Sie dann induktiv.
- Überlegen Sie wie sich das Jordan-Mass unter Skalierung verhält. Also wenn $A \subseteq \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar ist und $c > 0$, dann gilt $|cA| = c^n|A|$. Wieso?

**Bemerkung:** Diese Menge wird als $n$-Simplex bezeichnet.

*Das folgende Resultat werden Sie unten verwendet, um das Volumen des Einheitsballs in $\mathbb{R}^n$ zu berechnen.*

**12.2. Integral von Potenzen des Cosinus.**

Zeigen Sie, dass für $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\, dt = \begin{cases} \dfrac{(n-1)(n-3)\cdots 1}{n(n-2)\cdots 2}\pi, & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ \dfrac{(n-1)(n-3)\cdots 2}{n(n-2)\cdots 3} \cdot 2, & \text{falls } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Hier verwenden wir die Konvention, dass das leere Produkt 1 ergibt. Das leere Produkt kommt in den Fällen $n = 0, 1$ vor.

**12.3. Volumen des Einheitsballs.**

Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Berechnen Sie das Jordan-Mass des abgeschlossenen Einheitsballs $\overline{B}^n := \overline{B}_1^n(0) \subseteq \mathbb{R}^n$.

**Tipps:**

- Sie dürfen annehmen, dass $\overline{B}^n$ Jordan-messbar ist.
- Versuchen Sie das Jordan-Mass von $\overline{B}^n$ durch das Jordan-Mass von $\overline{B}^{n-1}$ auszudrücken und argumentieren Sie dann induktiv.
- Verwenden Sie wie in Aufgabe 11.1 das Verhalten des Jordan-Masses unter Skalierung.

### 12.4. Volumen von Zylinder, Kegel und Ball

**(a)** Skizzieren Sie den Zylinder

$$\overline{B}_1^2 \times [0,1]$$

und den Kegel

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^2 \times [0,1] \,\middle|\, \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq x_3 \right\}.$$

**(b)** Berechnen Sie das Jordan-Mass dieser beiden Mengen.

**(c)** Was ist der Zusammenhang zwischen den Volumen des Zylinders, des Kegels, und des Halb-Balls

$$\left\{ x \in \overline{B}_1^3 \,\middle|\, x_3 \geq 0 \right\}?$$

Wieso?

### 12.5. Kuchenstück

**(a)** Seien $\phi_- \leq \phi_+ \in (-\pi, \pi)$. Skizzieren Sie die Menge

$$S := \left\{ r\Big(\cos\phi, \sin\phi\Big) \,\middle|\, r \in [0,1],\ \phi \in [\phi_-, \phi_+] \right\}.$$

**(b)** Berechnen Sie den Flächeninhalt von $S$, also das zwei-dimensionale Jordan-Mass.

### 12.6. Integral einer drehinvarianten Funktion in $\mathbb{R}^3$

Seien $r_0 > 0$ und $\widetilde{f} : [0, r_0] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Wir definieren

$$f : \overline{B}_{r_0}^3 \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \widetilde{f}(\|x\|).$$

**(a)** Finden Sie eine Formel, die das drei-dimensionale Integral $\int_{\overline{B}^3_{r_0}} f(x)\,dx$ durch $\widetilde{f}$ ausdrückt.

**Tipp:** Verwenden Sie Kugelkoordinaten und die Substitutionsregel.

**(b)** Verwenden Sie diese Formel, um das Volumen von $\overline{B}^3_{r_0}$ zu berechnen.

### 12.7. Flächeninhalt

**(a)** Es seien $0 < a < b$, $0 < c < d$. Skizzieren Sie die Menge

$$S := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0 < x,\ a \le \frac{y}{x} \le b,\ c \le xy \le d\right\}.$$

**(b)** Berechnen Sie den Flächeninhalt von $S$.

**Tipp:** Finden Sie eine Koordinatentransformation, unter der $S$ eine einfachere Form annimt, und verwenden Sie die Substitutionsregel.

### 12.8. Kurvenintegral eines Vektorfelds

Betrachten Sie die Ellipse

$$C := \left\{x \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x_1^2 + 4x_2^2 = 1\right\}.$$

**(a)** Berechnen Sie das Einheitstangentialvektorfeld $T$ längs $C$, sodass $T$ die positive Orientierung von $C = \partial U$ ist bezüglich dem Gebiet

$$U := \left\{x \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x_1^2 + 4x_2^2 < 1\right\}.$$

**(b)** Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_{C,T} X \cdot d\mathbf{s} = \int_C X \cdot T\,ds$$

für das Vektorfeld

$$X(x) := \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

### 12.9. Integral der Rotation eines Vektorfelds

Wir schreiben $B^2 := B^2_1(0)$. Berechnen Sie das Integral

$$\int_{B^2} \operatorname{rot} X(x)\,dx$$

für

$$X(x) := \|x\|^2 \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

**12.10. Online-MC**

**Abgabe der Multiple-Choice Aufgaben:** Online auf Moodle.

**Es sind jeweils mehrere Antworten möglich.**

**(a)** Es sei

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \|x\|.$$

Berechnen Sie das Integral von $f$ über die Kreisscheibe $\overline{B}_1^2$.

**(i)** $\pi$

**(ii)** $2\pi$

**(iii)** $\frac{2\pi}{3}$

**(iv)** $2\pi \log(2)$

**(b)** Es sei

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{\|x\|}.$$

Berechnen Sie das Integral von $f$ über den Annulus

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq \|x\| \leq 2 \right\}.$$

**(i)** $\pi$

**(ii)** $2\pi$

**(iii)** $\frac{2\pi}{3}$

**(iv)** $2\pi \log(2)$

**(c)** Es sei

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{\|x\|^2}.$$

Berechnen Sie das Integral von $f$ über den Annulus

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq \|x\| \leq 2 \right\}.$$

**(i)** $\pi$

**(ii)** $2\pi$

**(iii)** $\frac{2\pi}{3}$

**(iv)** $2\pi \log(2)$