13.1. Länge eines Bogens auf der logarithmischen Spirale.

Wir betrachten den Bogen auf der logarithmischen Spirale, gegeben durch

$$C := \left\{ e^t \Big(\cos t, \sin t \Big) \,\Big|\, t \in [0, 2\pi] \right\}.$$

(a) Skizzieren Sie C.

(b) Zeigen Sie, dass C eine glatte Kurve in $\mathbb{R}^2$ mit Rand[1] ist.

Tipp: Finden Sie eine globale glatte Parametrisierung ψ von C. Vergleichen Sie mit einer Aufgabe aus Übungsserie 9. Sie dürfen verwenden, dass ψ glatt und injektiv ist und eine stetige Umkehrung besitzt.

(c) Bestimmen Sie den Rand von C.

(d) Berechnen Sie die Bogenlänge von C.

Die folgende Aufgabe ist eine Erweiterung einer Aufgabe aus der Serie 12.

13.2. Ellipse, Orientierungen, C^k-Gebiet, positive Orientierung des Randes, Kurvenintegral eines Vektorfeldes.

Betrachten Sie die Ellipse

$$C := \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \,\Big|\, x_1^2 + 4x_2^2 = 1 \right\}.$$

(a) Skizzieren Sie C.

(b) Zeigen Sie, dass C eine glatte Kurve ist.

Tipp: Schauen Sie nochmals Übungsserie 9 an.

(c) Bestimmen Sie für jedes $x \in C$ den Tangentialraum an C im Punkt x.

Tipp: Schauen Sie nochmals Übungsserie 9 an.

(d) Bestimmen Sie eine Orientierung T (= Einheitstangentialvektorfeld) von C.

Geben sie noch eine andere Orientierung von C an.

Bemerkung: Es gibt auf C genau zwei Orientierungen.

---

[1] = glatte eindimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$ mit Rand

(e) Zeigen Sie, dass die Menge

$$U := \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x_1^2 + 4x_2^2 < 1 \right\}$$

ein C^∞-Gebiet ist.

(f) Zeigen Sie, dass ∂U, der Rand von U, durch C gegeben ist.

(g) Bestimmen Sie die positive Orientierung von $C = \partial U$ (bezüglich U).

(h) Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_{C,T} X \cdot d\mathbf{s} = \int_C X \cdot T\, ds$$

für das Vektorfeld

$$X(x) := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

Die folgende Aufgabe ist schon in der Serie 12 erschienen.

13.3. Integral der Rotation eines Vektorfelds.

Wir schreiben $B^2 := B_1^2(0)$. Berechnen Sie das Integral

$$\int_{B^2} \operatorname{rot} X(x)\, dx$$

für

$$X(x) := \|x\|^2 \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

Die folgende Aufgabe wird in der Vorlesung verwendet, um eine Formel für das Integral über eine Fläche in $\mathbb{R}^3$ zu geben.

13.4. Gramsche Determinante für eine 3×2-Matrix.

Sei $A \in \mathbb{R}^{3\times 2}$, also eine 3×2-matrix mit reellen Koeffizienten. Zeigen Sie, dass gilt

$$\det(A^T A) = \|A_1 \times A_2\|^2,$$

wobei A_j die j-te Spalte von A ist.

13.5. Kugelkappe, intrinsischer Rand, Koorientierung, induzierte Orientierung des Randes, Flächeninhalt.

Sei $a \in (0, 1)$.

(a) Skizzieren Sie die Kugelkappe

$$\Sigma := \left\{ x \in S^2 \,\middle|\, x_3 \geq a \right\}.$$

(b) Zeigen Sie, dass Σ eine glatte Untermannigfaltigkeit mit Rand ist.

Tipp: Verwenden Sie eine globale Parametrisierung von Σ.

(c) Bestimmen Sie $\partial\Sigma$, den intrinsischen Rand von Σ.

(d) Bestimmen Sie eine Koorientierung ν (= Einheitsnormalenvektorfeld) von Σ.

Geben Sie noch eine andere Koorientierung von Σ an.

Bemerkung: Es gibt auf Σ genau zwei Koorientierungen.

(e) Bestimmen Sie die durch ν induzierte Orientierung des Randes $\partial\Sigma$.

(f) Berechnen Sie den Flächeninhalt von Σ, d. h. ihr zwei-dimensionales Volumen.

(g) Berechnen Sie den Flächeninhalt von S^2.

13.6. Online-MC

Abgabe der Multiple-Choice Aufgaben: Online auf Moodle.

Es sind jeweils mehrere Antworten möglich.

(a) Sei $X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ein Vektorfeld und $U \subseteq \mathbb{R}^2$ ein beschränktes glattes Gebiet. Falls gilt $\operatorname{rot}(X)(x) = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}^2$, dann ist der Flächeninhalt von U gegeben durch

$$|U| = \int_{\partial U} X \cdot d\mathbf{s},$$

wobei das Kurvenintegral mit der positiven Orientierung berechnet wird.

(i) Wahr

(ii) Falsch

(b) Betrachten Sie die Einheitskreisscheibe $\overline{B}_1^2$ und das Vektorfeld

$$X(x) = \begin{pmatrix} 2x_1x_2 \\ x_1^2 + x_1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_{\partial \overline{B}_1^2} X \cdot d\mathbf{s},$$

wobei die positive Orientierung verwendet wird.

(i) 0

(ii) 1

(iii) π

(iv) 2π

(c) Betrachten Sie die folgende Teilmenge von $\mathbb{R}^3$:

$$\Sigma = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 = x_3^2,\ 1 \leq x_3 \leq 2\}.$$

Welche der folgenden Abbildungen ist eine globale Parametrisierung von Σ?

(i) $\psi : \overline{B}_2^2 \setminus B_1^2 \to \mathbb{R}^3, \quad \psi(y_1, y_2) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \sqrt{y_1^2 + y_2^2} \end{pmatrix}$

(ii) $\psi : \overline{B}_2^2 \setminus B_1^2 \to \mathbb{R}^3, \quad \psi(y_1, y_2) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$

(iii) $\psi : \overline{B}_1^2 \to \mathbb{R}^3, \quad \psi(y_1, y_2) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \sqrt{y_1^2 + y_2^2} \end{pmatrix}$

(iv) $\psi : \overline{B}_1^2 \to \mathbb{R}^3, \quad \psi(y_1, y_2) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$

(d) Berechnen Sie den zweidimensionalen Flächeninhalt der Teilmenge

$$\Sigma = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 = x_3^2,\ 1 \leq x_3 \leq 2\}.$$

(i) 3π

(ii) $3\sqrt{2}\pi$

(iii) $\sqrt{3}\pi$

(iv) $\log(2)\pi$