14.1. Abgeschnittenes Paraboloid, intrinsischer Rand, Koorientierung, induzierte Orientierung des Randes, Flächeninhalt.

Es sei $r_0 > 0$.

(a) Skizzieren Sie das abgeschnittene Paraboloid (= "Parabolschüssel")

$$\Sigma := \Sigma_{r_0} := \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2^2\right) = x_3,\ x_1^2 + x_2^2 \leq r_0^2 \right\}. \tag{1}$$

(b) Zeigen Sie, dass Σ eine glatte Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$ mit Rand ist.

Tipp: Verwenden Sie eine globale Parametrisierung $\psi : \overline{V} \to \mathbb{R}^3$ von Σ.

(c) Bestimmen Sie $\partial\Sigma$, den intrinsischen Rand von Σ.

(d) Bestimmen Sie eine Koorientierung ν (= Einheitsnormalenvektorfeld) von Σ.

Geben Sie noch eine andere Koorientierung von Σ an.

Bemerkung: Es gibt auf Σ genau zwei Koorientierungen.

(e) Bestimmen Sie die durch ν induzierte Orientierung des Randes $\partial\Sigma$.

(f) Berechnen Sie den Flächeninhalt von Σ, d. h. ihr zwei-dimensionales Volumen.

Tipp: Verwenden Sie die Formel aus der Vorlesung

$$\mathrm{Vol}_2(\Sigma) = \int_{\overline{V}} \left\| D_1\psi(y) \times D_2\psi(y) \right\| dy,$$

wobei $\psi : \overline{V} \to \mathbb{R}^3$ eine globale Parametrisierung von Σ ist.

(g) Berechnen Sie den Grenzwert

$$\lim_{r_0 \to 0} \frac{\mathrm{Vol}_2(\Sigma_{r_0})}{\mathrm{Vol}_2(\overline{B}^2_{r_0})}.$$

Überlegen Sie, ob das Ergebnis mit Ihrer Intuition übereinstimmt.

14.2. Fluss durch abgeschnittenes Paraboloid, Satz von Stokes

Wir betrachten das abgeschnittene Paraboloid Σ, gegeben durch (1). Wir fixieren eine Koorientierung ν von Σ. (Siehe Aufgabe 1(d) für die Berechnung einer Koorientierung.)

(a) Berechnen Sie für die Vektorfelder

(i) $X \equiv e_3$

(ii) $X \equiv e_1$

den Fluss (=Oberflächenintegral)

$$\int_{\Sigma,\nu} X \cdot d\mathbf{A},$$

indem Sie die Definition des Flusses verwenden.

(b) Wir definieren

$$Y(x) := \sin(x_3) \begin{pmatrix} x_3 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie den Fluss

$$\int_{\Sigma,\nu} (\nabla \times Y) \cdot d\mathbf{A}.$$

Tipp: Verwenden Sie den Satz von Stokes.

(c) Berechnen Sie den Fluss $\int_{\Sigma,\nu} e_3 \cdot d\mathbf{A}$ nochmals, indem Sie den Satz von Stokes verwenden. Finden Sie dazu ein Vektorfeld Y, dessen Rotation gleich e_3 ist.

14.3. Satz von Gauß.

Betrachten Sie die Menge $U := B_2^2(0) \setminus \overline{B}_1^2(0) \subseteq \mathbb{R}^2$ und das Vektorfeld

$$X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad X(x) := \begin{pmatrix} x_1^2 - x_2^2 \\ x_1^2 + x_2^2 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie $\nabla \cdot X = \operatorname{div} X$, die Divergenz von X.

(b) Bestimmen Sie die nach aussen weisende Koorientierung ν des Randes ∂U.

(c) Berechnen Sie den Fluss

$$\int_{\partial U,\nu} X \cdot d\mathbf{A}$$

direkt mittels der Definition.

(d) Berechnen Sie diesen Fluss nochmals mit Hilfe des Satzes von Gauß.

14.4. Vektoranalytische Identitäten.

Es sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ eine Funktion der Klasse C^2 und $X : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein Vektorfeld der Klasse C^2. Zeigen Sie, dass die folgenden Identitäten gelten.

(a) $\nabla \times (\nabla f) = 0$

(b) $\nabla \cdot (\nabla f) = \Delta f$

(c) $\nabla \cdot (\nabla \times X) = 0$

(d) $\nabla \times (\nabla \times X) = \nabla(\nabla \cdot X) - \Delta X$

Bemerkung: Hier ist $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$ der Laplace-Operator.

14.5. Faradaysche Gesetz der Induktion und Maxwell-Gleichung.

Es seien E und B das elektrische und das magnetische Feld, wobei E und B von der Zeit $t \in \mathbb{R}$ und dem Ort $x \in \mathbb{R}^3$ abhängen. Das Faradaysche Gesetz der Induktion besagt, dass die zeitliche Veränderung des Flusses von B durch eine koorientierte Fläche $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ gleich der negativen Zirkulation von E durch $\partial\Sigma$ ist. Leiten Sie daraus die folgende Gleichung ab:

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}. \tag{2}$$

Bemerkung: Das Faradaysche Gesetz impliziert, dass ein sich ändernder magnetischer Fluss durch eine Fläche, die von einem Draht umspannt wird, einen Strom im Draht induziert. Dies ist das grundlegende Prinzip von Elektromotoren und Generatoren. Gleichung (2) ist eines der vier Maxwell-Gesetze der Elektrodynamik.

14.6. Coulomb-Gesetz.

Das Coulomb-Gesetz besagt, dass zwei elektrisch geladene Teilchen sich anziehen oder abstossen mit einer Kraft, welche proportional ist zum Produkt der Ladungen und invers proportional zum Quadrat der Distanz zwischen den Teilchen. Wir nehmen hier an, dass es sich um Punktladungen handelt also Teilchen ohne räumliche Ausdehnung.

Leiten Sie das Coulomb-Gesetz aus den folgenden Prinzipien ab:

(i) Die elektrostatische Kraft F auf die Ladung q, welche durch die Ladung Q generiert wird ist proportional zu Qq. Sie zeigt von x_0 nach x, wo x und x_0 die Positionen von q und Q bezeichnen.

(ii) Elektrische Ladung ist die Quelle der elektrostatischen Kraft, und somit verschwindet die Divergenz der elektrostatischen Kraft, welche durch Q generiert wird, überall ausser im Punkt x_0.

(iii) Die Gesetze der Physik sind invariant unter Translation.

(iv) Die Gesetze der Physik sind invariant unter Rotation.