1. Inhomogene Differentialgleichung (Serie 3)

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichung für $y = y(t)$:

$$y'' - 4y' + 4y = \sin(2t) + 1.$$

Finden Sie zudem die Lösung zu den Anfangswerten $y(0) = 1, y'(0) = 0$.

Hinweis: Verwenden Sie den Ansatz:

$$y_{part}(t) = A \cdot \cos(2t) + B \cdot \sin(2t) + C,$$

für $A, B, C \in \mathbb{R}$, um eine spezielle Lösung zu bestimmen.

2. Häufungspunkte von Folgen in der Ebene (Serie 5)

Bestimmen Sie für die folgenden Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^2$ jeweils alle Häufungspunkte:

(a) $a_n := \left(\cos\left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right), \sin\left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right)\right)$

(b) $b_n := \left(\frac{1}{n}\cos\left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right), \frac{1}{n}\sin\left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right)\right)$

Können Sie Beispiele von Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^2$ für ein beliebiges gegebenes $k \in \mathbb{N}$ geben, sodass die Folge genau k Häufungspunkte besitzt?

3. Fixpunkte (Serie 6)

Es sei $f : K \to K$ eine stetige Funktion und $K \subset \mathbb{R}^d$ eine kompakte Teilmenge. Wir sagen, dass $x_0 \in K$ ein Fixpunkt von f ist, falls:

$$f(x_0) = x_0$$

(a) Beweisen Sie, dass die Funktion:

$$g : K \to \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad g(x) := \|f(x) - x\|,$$

für $\|\cdot\|$ eine beliebige Norm, eine stetige Funktion ist.

(b) Folgern Sie, dass wenn f Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante $C < 1$ bezüglich $\|\cdot\|$ ist, dann existiert ein $x_0 \in K$ mit:

$$g(x_0) = 0$$

Folgern Sie, dass x_0 ein Fixpunkt ist.

Hinweis: Beweisen Sie zuerst, dass $g(f(x)) \leq g(x)$ für alle $x \in K$.

(c) Ist die Aussage korrekt, wenn wir nur annehmen, dass f stetig bzw. wenn die Lipschitz-Konstante $C \geq 1$ ist? Finden Sie ein Gegenbeispiel für $K \subset \mathbb{R}^2$.

Hinweis: Betrachten Sie $K := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 1 \leq \|(x,y)\|_2 \leq 2\right\}$. Wie können Sie K stetig in sich selbst abbilden ohne Fixpunkt? Ist die resultierende Abbildung Lipschitz?

4. Taylor-Entwicklung (Serie 4, FS 2020)

Man berechne das Taylorpolynom dritten Grades der folgenden Funktion um den angegebenen Punkt:

$$f(x,y) = e^{x/y} \text{ um } P = (1,1)$$

5. Optimierungsproblem mit Nebenbedingungen (Serie 6, FS 2020)

Ziel dieser Aufgabe ist es, die globalen Extrema der Funktion

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + 7x - 2y$$

auf dem Bereich $D = \{(x,y) \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ 3x + y \leq 3\}$ zu bestimmen.

(a) Argumentieren Sie, warum f sein globales Maximum und Minimum auf D annimmt.

(b) Bestimmen Sie die kritischen Punkte von f im Inneren von D.

(c) Bestimmen Sie die Kandidaten für Extrema der Einschränkung von f auf ∂D.

Hinweis: Kandidaten für Extrema sind kritische Punkte der Einschränkung von f auf ∂D gemäss Lagrange-Multiplikatoren sowie Punkte, in denen sich die Methode der Lagrange-Multiplikatoren nicht anwenden lässt.

(d) Bestimmen Sie das globale Maximum und Minimum von f auf D.

(e) Es sei m das Minimum von f auf D und M das Maximum von f auf D. Nimmt f auch den Wert $\frac{M+m}{2}$ an einer Stelle in D an? Warum?

6. Mehrfachintegral (Serie 7, FS 2020)

(a) Wir betrachten die Menge

$$E = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y > 0, x < y < 2x, x^2 y < 1\right\} .$$

Schreiben Sie E als x-einfachen Bereich, d.h. als Menge der Form:

$$E := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a < x < b, \varphi(x) < y < \psi(x)\},$$

für Funktionen $\varphi, \psi :]a, b[\to \mathbb{R}$ und $a, b \in \mathbb{R}$.

(b) Berechnen Sie das Integral $\int_E xy \, d\mu$ für E wie in Teilaufgabe a).

Hinweis: Sie können E auch als disjunkte Vereinigung von zwei x-einfachen Bereichen schreiben, um das Integral zu berechnen.

7. Invertierbarkeit und Implizite Funktionen (Prüfung 2021)

Man betrachte:

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x_1, x_2) := \begin{pmatrix} x_2^2 + \sin(x_1 x_2) \\ \frac{x_1^2}{2} - x_1 x_2 + \frac{x_2^2}{2} + x_2 \end{pmatrix},$$

sowie:

$$\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad \phi(y_1, y_2) := e^{y_2} - e^{-y_2} - 2.$$

Zudem sei:

$$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad h(x_1, x_2) = \phi(f(x_1, x_2))$$

(a) Ist f ein lokaler Diffeomorphismus von einer Umgebung von $(0, 0)$ auf eine Umgebung von $f(0, 0)$? Berechnen Sie gegebenenfalls $df^{-1}(f(0, 0))$ der lokalen Inversen.

(b) Ist f ein lokaler Diffeomorphismus von einer Umgebung von $(1, 0)$ auf eine Umgebung von $f(1, 0)$? Berechnen Sie gegebenenfalls $df^{-1}(f(1, 0))$ der lokalen Inversen.

(c) Berechnen Sie $d\phi(y_1, y_2)$ sowie $dh(x_1, x_2)$ für alle $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$.

(d) Finden Sie alle $r \in \mathbb{R}$, sodass $h^{-1}(\{r\})$ um jeden Punkt $(x_{10}, x_{20}) \in h^{-1}(\{r\})$ lokal der Graph einer C^1-Funktion ist.

Hinweis: Man muss also die Existenz einer C^1-Funktion g definiert in einer Umgebung von x_{10} **oder** x_{20} beweisen, sodass $h^{-1}(\{r\})$ durch $(x_1, g(x_1))$ bzw. $(g(x_2), x_2)$ parametrisiert wird in einer Nachbarschaft von (x_{10}, x_{20}).

8. Graph von C^1-Funktion (Prüfung 2019)

Beweisen Sie, dass für die Funktion:

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) := 2e^x + y(x-1) - y^2,$$

die Level-Menge $f^{-1}(\{0\})$ lokal um den Punkt $(0,1)$ (d.h. in einer Umgebung $U \times V$ von $(0,1)$) als Graph $(x, g(x))$ einer C^1-Funktion $g : U \to V$, wobei U eine Umgebung von 0 und V eine Umgebung von 1 ist, darstellen lässt. Bestimmen Sie zudem $g'(0)$.

9. Satz von Green

Es sei:

$$D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ 3x + y \leq 3\}$$

Ferner sei folgendes Vektorfeld $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben:

$$v(x,y) := \begin{pmatrix} x + y^2 \\ 4x^2y - 2y^3 \end{pmatrix}$$

(a) Berechnen Sie das folgende Integral:

$$\int_{\partial D} v \ \vec{dl},$$

ohne den Satz von Green.

Bemerkung: Erinnern Sie sich an die Definition des Integrals:

$$\int_{\partial D} v \ \vec{dl} = \int_a^b v(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) dt,$$

wobei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ eine Parametrisierung von ∂D ist, sodass D jeweils zur linken des Weges γ in Durchlaufrichtung liegt.

(b) Berechnen Sie das folgende Integral:

$$\int_{\partial D} v \ \vec{dl},$$

mit den Satz von Green.

10. Volumen

(a) Berechnen Sie das Volumen der folgenden Teilmenge von $\mathbb{R}^3$:

$$K := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2 + y^2 \leq z^2, 1 \leq z \leq 2 \right\},$$

indem Sie Zylinderkoordinaten verwenden.

(b) Schreiben Sie die Fläche:

$$S := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2 + y^2 = z^2, 1 \leq z \leq 2 \right\},$$

als Vereinigung von zwei geeigneten Graphen.

(c) Berechnen Sie zudem die Oberfläche von K.