1.1. Bolzano-Weierstrass

(a) Nach dem Satz von Bolzano-Weierstrass ist es ausreichend, die Beschränktheit der Folge zu zeigen.
$|a_n| = \left|\frac{(n^2+50n+2)\cos(n^2+n)}{n^2+n+1}\right| \leq \left|\frac{(n^2+50n+2)}{n^2+n+1}\right| \leq \left|\frac{(n^2+50n+2)}{n^2}\right| \leq 1 + \frac{50}{n} + \frac{2}{n^2} \leq 53.$

(b) $b_n = \frac{(-1)^n}{n}$ ist auch Beschränkt und hat somit wegen dem Satz von Bolzano-Weierstrass konvergente Teilfolgen, denn $|b_n| \leq 1$ für alle $n \geq 1$.

1.2. Zwischenwertsatz

(a) $p(x) = a_n(x^n + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{a_n} x^k)$ mit $a_n \neq 0$. Daher sind die Nullstellen des Polynoms p gleich den Nullstellen des Polynoms $x^n + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{a_n} x^k$ und dies hat Leitkoeffizient 1.

(b) Betrachte nun für $x \neq 0$, $p(x) = x^n(1 + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^{k-n})$ und bemerke, dass $\lim_{x\to+\infty}\Big(1 + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^{k-n}\Big) = \lim_{x\to-\infty}\Big(1 + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^{k-n}\Big) = 1$. Es folgt aus der Definition von Limes, dass ein $M > 0$ existiert, sodass $1 + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^{n-k} > 0$ für alle $|x| > M$. Da n ungerade ist, gilt $x^n < 0$ für $x < 0$ und $x^n > 0$ für $x > 0$. Also haben wir $p(x) < 0$ für alle $x < -M < 0$ und $p(x) > 0$ für alle $x > M > 0$.

(c) Nach dem Zwischenwertsatz für die funktion $p : [-2M, 2M] \to \mathbb{R}$ muss p eine Nullstelle in $[-2M, 2M]$ haben, denn $p(-2M) < 0$ und $p(2M) > 0$.

1.3. Partielle Integration

(a) Wir integrieren zuerst die gegebene Funktion und werten sie im letzen Schritt aus.

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} 4x\cos(2-3x)dx &= (4x)\bigg(-\frac{1}{3}\sin(2-3x)\bigg)\bigg|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{-4}{3}\sin(2-3x)dx \\ &= -\frac{4}{3}x\sin(2-3x)\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{4}{9}\cos(2-3x)\Big|_{-\pi}^{\pi}.\end{aligned}$$

Auswerten der Funktion für die gegebenen Grenzen ergibt:

$$\int_{-\pi}^{\pi} 4x\cos(2-3x)dx = -\frac{4\pi}{3}(\sin(2-3\pi)+\sin(2+3\pi)) + \frac{4}{9}(\cos(2-3\pi)-\cos(2+3\pi))$$

(b)

$$\begin{aligned}\int_6^0 (2+5x)e^{\frac{1}{3}x}dx &= (2+5x)3e^{\frac{1}{3}x}\Big|_6^0 - \int_6^0 15e^{\frac{1}{3}x}dx \\ &= 3e^{\frac{1}{3}x}(2+5x)\Big|_6^0 - 45e^{\frac{1}{3}x}\Big|_6^0 \\ &= \left(15xe^{\frac{1}{3}x} - 39e^{\frac{1}{3}x}\right)\Big|_6^0.\end{aligned}$$

Auswerten der Funktion für die gegebenen Grenzen ergibt:

$$\int_6^0 (2+5x)e^{\frac{1}{3}x}\,dx = -39 - 51e^2$$

(c) Wir wenden zwei Mal partielle Integration an.

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}(3x+x^2)\sin(2x)dx &= -\frac{1}{2}(3x+x^2)\cos(2x)\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(3+2x)\cos(2x)dx \\ &= -\frac{1}{2}(3x+x^2)\cos(2x)\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(3+2x)\sin(2x)\Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi}\sin(2x)dx\right] \\ &= -\frac{1}{2}(3x+x^2)\cos(2x)\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{4}(3+2x)\sin(2x)\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{4}\cos(2x)\Big|_{-\pi}^{\pi}.\end{aligned}$$

Einsetzen der angegebenen Randwerte ergibt das Ergebnis.

1.4. Variation der Konstanten

(a) homogene Lösung $y_{\text{hom}}(x) = Ce^{3x}$
Ansatz: $y(x) = C(x)e^{3x}$
Ableiten und Einsetzen: $C'e^{3x} + 3Ce^{3x} - 3Ce^{3x} = e^{5x}$.
Daraus folgt $C' = e^{2x}$
Integrieren: $C = \int e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x} + K$
Lösung: $y(x) = (\frac{1}{2}e^{2x} + K)e^{3x},\ K \in \mathbb{R}$.

(b) $C'e^{3x} + 3Ce^{3x} - 3Ce^{3x} = e^{3x}$
Daraus folgt: $C' = 1$
Integration ergibt: $C = x + K$
Und die Lösung lautet. $y(x) = xe^{3x} + Ke^{3x},\ K \in \mathbb{R}$.

(c) homogene Lösung: $y_{\text{hom}}(x) = Ce^{x}$
Ansatz: $y(x) = C(x)e^{x}$
Ableiten und Einsetzen: $C'e^{x} + Ce^{x} - Ce^{x} = \sin(x)$
Es folgt: $C' = \sin(x)e^{-x}$
Integrieren ergibt: $C = \int \sin(x)e^{-x}dx$.

Wir berechnen das Integral mit Hilfe von partieller Integration:

$$\begin{aligned} C = \int \sin(x)e^{-x}dx &= -e^{-x}\sin(x) + \int \cos(x)e^{-x}dx \\ &= -e^{-x}\sin(x) - e^{-x}\cos(x) - C \end{aligned}$$

Es folgt: $C = -\frac{1}{2}e^{-x}(\sin(x) + \cos(x)) + K$
Und die Lösung lautet damit: $y(x) = -\frac{1}{2}(\sin(x) + \cos(x)) + Ke^{x},\ K \in \mathbb{R}$