4.1. Inhomogene Differentialgleichungen

(a) Wir betrachten die Differentialgleichung:

$$2y'' + 3y' + 10y = 1. \tag{1}$$

Zuerst lösen wir die entsprechende homogene Differentialgleichung

$$2y'' + 3y' + 10y = 0.$$

Das charakteristische Polynom lautet

$$\operatorname{chp}(\lambda) = 2\lambda^2 + 3\lambda + 10$$

und besitzt die Nullstellen

$$\lambda_1 = \frac{1}{4}\left(-3 + i\sqrt{71}\right) \quad \text{und} \quad \lambda_2 = \frac{1}{4}\left(-3 - i\sqrt{71}\right).$$

Also ist die allgemeine homogene reelle Lösung $y_h(x)$:

$$y_h(x) = e^{-\frac{3}{4}x}\left(C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{71}}{4}x\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{71}}{4}x\right)\right) \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Nun bestimmen wir eine partikuläre Lösung von (1). Dazu machen wir den Ansatz

$$y_p(x) = C.$$

Durch Einsetzen berechnen wir $C = \frac{1}{10}$, somit ist $y_p(x) = \frac{1}{10}$ eine Lösung von (1). Damit ist

$$\begin{aligned} y(x) &= y_h(x) + y_p(x) \\ &= e^{-\frac{3}{4}x}\left(C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{71}}{4}x\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{71}}{4}x\right)\right) + \frac{1}{10} \end{aligned}$$

die allgemeine Lösung von

$$2y'' + 3y' + 10y = 1.$$

(b) Wir betrachten nun die DGL:

$$2y'' + 3y' + 10y = \sin(2x) \tag{2}$$

Die Lösung der zugehörigen homogenen DGL ist dieselbe wie in der vorherigen Teilaufgabe:

$$y_h(x) = e^{-\frac{3}{4}x}\left(C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{71}}{4}x\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{71}}{4}x\right)\right) \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Es bleibt also eine partikuläre Lösung für (2) zu bestimmen. Für (2) machen wir den Ansatz

$$y_p(x) = C_3 \sin(2x) + C_4 \cos(2x).$$

Einsetzen in (2) liefert

$$(2C_3 - 6C_4)\sin(2x) + (2C_4 + 6C_3)\cos(2x) = \sin(2x).$$

Mittels Koeffizientenvergleich erhalten wir das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2C_3 - 6C_4 &= 1 \\ 2C_4 + 6C_3 &= 0 \end{aligned}$$

Wir finden

$$C_3 = \frac{1}{20} \quad \text{und} \quad C_4 = -\frac{3}{20}.$$

Also ist

$$y_p(x) = \frac{1}{20}\sin(2x) - \frac{3}{20}\cos(2x)$$

eine partikuläre Lösung von (2). Somit ist die allgemeine Lösung:

$$\begin{aligned} y(x) &= y_h(x) + y_p(x) \\ &= e^{-\frac{3}{4}x}\left(C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{71}}{4}x\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{71}}{4}x\right)\right) + \frac{1}{20}\sin(2x) - \frac{3}{20}\cos(2x) \end{aligned}$$

(c) Nun bestimmen wir eine partikuläre Lösung der folgenden DGL:

$$2y'' + 3y' + 10y = \sin(2x) + 1 \tag{3}$$

Dazu machen wir den Ansatz

$$y_p(t) = \frac{1}{20}\sin(2x) - \frac{3}{20}\cos(2x) + \frac{1}{10},$$

und gemäss Superpositionsprinzip ist dies tatsächlich eine partikuläre Lösung der DGL. Damit ist die allgemeine Lösung von

$$2y'' + 3y' + 10y = \sin(2x) + 1.$$

gerade

$$\begin{aligned} y(x) &= y_h(x) + y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x) \\ &= e^{-\frac{3}{4}x}\left(C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{71}}{4}x\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{71}}{4}x\right)\right) + \frac{1}{20}\sin(2x) - \frac{3}{20}\cos(2x) + \frac{1}{10}, \end{aligned}$$

da die zugehörige homogene DGL wieder identisch mit derjenigen der vorhergehenden Teilaufgaben ist.

4.2. Matrix-Exponential nicht-diagonalisierbarer Matrizen

(a) Man rechnet leicht nach, dass das charakteristische Polynom gerade

$$(\lambda - 2)^2,$$

ist. Somit ist $\lambda = 2$ der einzige Eigenwert. Allerdings gilt:

$$A_2 - 2Id = N,$$

wo N wie in der zweiten Teilaufgabe definiert ist. Wäre A_2 diagonalisierbar, so müsste eine Basis aus Eigenvektoren zum Eigenwert 2 existieren. Mit einem Basiswechsel hätten wir $S^{-1} \cdot A_2 \cdot S = 2Id$, also $A_2 = 2S \cdot Id \cdot S^{-1} = 2Id$. Da aber $N \neq 0$, ist dies inkorrekt und A nicht diagonalisierbar.

(b) Direktes nachrechnen zeigt $N^2 = 0$. Die Kommutationsrelation $Id \cdot N = N = N \cdot Id$ ist ebenfalls offensichtlich. Damit können wir sehen:

$$A_2^2 = (2Id + N)^2 = 4Id + 2Id \cdot N + 2N \cdot Id + N^2 = 4Id + 4N$$

Ganz analog berechnen wir:

$$A_2^3 = (2Id + N)^3 = 8Id + 12N + 6N^2 + N^3 = 8Id + 12N$$

Die verbleibenden Potenzen berechnen sich analog und ergeben:

$$\begin{aligned} A_2^4 &= (2Id + N)(8Id + 12N) = 16Id + 32N + 12N^2 = 16Id + 32N \\ A_2^5 &= (2Id + N)(16Id + 32N) = 32Id + 80N + 20N^2 = 32Id + 80N \end{aligned}$$

(c) Es ist leicht zu sehen, dass der Koeffizient vor Id für A_2^n gerade 2^n ist. Schreiben wir a_n für den Koeffizienten zu N in A_2^n, so erhalten wir die Rekursion:

$$2^{n+1}Id + a_{n+1}N = A_2^{n+1} = (2Id + N)(2^n Id + a_n N) = 2^{n+1}Id + (2a_n + 2^n)N$$

Hieraus folgt:

$$a_{n+1} = 2a_n + 2^n, \quad \forall n \geq 2.$$

Somit auch:

$$\begin{aligned} a_n &= 2a_{n-1} + 2^{n-1} \\ &= 4a_{n-2} + 2 \cdot 2^{n-2} + 2^{n-1} = 4a_{n-2} + 2 \cdot 2^{n-1} \\ &= 8a_{n-3} + 4 \cdot 2^{n-3} + 2 \cdot 2^{n-1} = 8a_{n-3} + 3 \cdot 2^{n-1} = \dots \end{aligned}$$

Zusammen mit $a_1 = 1$ suggeriert dies die folgende Formel:

$$a_n = 2^{n-1} + (n-1) \cdot 2^{n-1} = n2^{n-1}$$

Prüfen der Formel zeigt auch $a_1 = 1, a_2 = 4, a_3 = 12, a_4 = 32, a_5 = 80$ wie gewünscht. Wir beweisen nun die Formel mit Induktion. Angenommen die Formel gilt für ein beliebiges n, dann gilt gemäss der obigen Rekursionsformel:

$$a_{n+1} = 2a_n + 2^n = 2\left(n2^{n-1}\right) + 2^n = n2^n + 2^n = (n+1)2^{(n+1)-1}.$$

Also gilt die gewünschte Formel für alle n. Zusammen mit dem Koeffizienten 2^n von Id ergibt dies

$$A_2^n = 2^n Id + a_n N = 2^n Id + n2^{n-1} N = \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

(d) Wir berechnen nun (beachten Sie, dass die Formeln aus der vorherigen Teilaufgabe auch für $n = 0$ gelten!):

$$\begin{aligned} \exp(A_2 t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A_2^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \begin{pmatrix} (2t)^n & nt(2t)^{n-1} \\ 0 & (2t)^n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2t)^n}{n!} & t \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2t)^{n-1}}{(n-1)!} \\ 0 & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2t)^n}{n!} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Hierbei wurde verwendet, dass $a_0 = 0$, um die Summe in der Komponente oben rechts auf $n \geq 1$ zu beschränken.

(e) Die DGL erster Ordnung lässt sich wie folgt finden:

$$F' = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y' \\ -4y + 4y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$$

Daher definieren wir nun:

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$$

Das zugehörige charakteristische Polynom ist $(\lambda - 2)^2$, also ist $\lambda = 2$ der einzige Eigenwert und analog zur ersten Teilaufgabe sehen wir, dass die Matrix A nicht diagonalisierbar ist. Wir sehen zudem mittels direkter Berechnung:

$$e_1 = (1, 2)$$

Somit ist:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, S^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -2 & 1 \end{pmatrix},$$

Nachrechnen (oder unter benutzen der Jordan-Normalform) zeigt:

$$S^{-1}AS = A_2$$

Wenn wir $A^n = (S^{-1}A_2S)^n = S^{-1}A^nS$ verwenden, so sehen wir:

$$\exp(At) = S\exp(A_2t)S^{-1} = S\begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} S^{-1}$$

Ausrechnen ergibt:

$$\exp(At) = \begin{pmatrix} -2te^{2t} + e^{2t} & te^{2t} \\ -4te^{2t} & e^{2t} + 2te^{2t} \end{pmatrix}$$

(f) Durch Einsetzen sehen wir für beliebige reelle Zahlen C, D:

$$\begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2te^{2t} + e^{2t} & te^{2t} \\ -4te^{2t} & e^{2t} + 2te^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C(-2te^{2t} + e^{2t}) + Dte^{2t} \\ -4Cte^{2t} + D(e^{2t} + 2te^{2t}) \end{pmatrix}$$

Somit auch:

$$y(t) = C(-2te^{2t} + e^{2t}) + Dte^{2t} = Ce^{2t} + (D - 2C)te^{2t}$$

Dies zeigt, dass e^{2t} und te^{2t} die Fundamentallösungen der DGL sind. Man beachte, dass das charakteristische Polynom der DGL 2.Ordnung auch $(\lambda - 2)^2$ ist, somit haben wir eine Lösung mehr entdeckt, als a priori mit der einfachen Formel aus der Vorlesung zu finden war.

4.3. Lipschitz-Stetigkeit des Skalarprodukts

Wir nehmen zwei beliebige Punkte $(x, y) \in B_1(0) \times B_1(0)$ und $(x_0, y_0) \in B_1(0) \times B_1(0)$ und berechnen:

$$\begin{aligned}
|x \cdot y - x_0 \cdot y_0| &= |x \cdot y - x_0 \cdot y + x_0 \cdot y - x_0 \cdot y_0| \\
&= |(x - x_0) \cdot y + x_0 \cdot (y - y_0)| \\
&\leq |(x - x_0) \cdot y| + |x_0 \cdot (y - y_0)| \\
&\leq \|x - x_0\|_{\mathbb{R}^n} \cdot \|y\|_{\mathbb{R}^n} + \|x_0\|_{\mathbb{R}^n} \cdot \|y - y_0\|_{\mathbb{R}^n},
\end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt die Cauchy-Schwarz Ungleichung für das Skalarprodukt in $\mathbb{R}^n$ verwendet wurde. Da $x_0, y \in B_1(0)$ Elemente des Einheitsballs sind, gilt $\|x_0\|_{\mathbb{R}^n}, \|y\|_{\mathbb{R}^n} \leq 1$. Eingesetzt in der Ungleichung oben ergibt dies:

$$|x \cdot y - x_0 \cdot y_0| \leq \|x - x_0\|_{\mathbb{R}^n} + \|y - y_0\|_{\mathbb{R}^n}.$$

Um diese Ungleichung mit der Norm auf $\mathbb{R}^{2n} \cong \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ auszudrücken, verwenden wir, dass für nichtnegative Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:

$$a + b \leq \sqrt{2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Dies folgt z.B. aus der Cauchy-Schwarz Ungleichung für das Skalarprodukt in $\mathbb{R}^2$:

$$a + b = (a, b) \cdot (1, 1) \leq \|(a, b)\| \cdot \|(1, 1)\| = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{2}.$$

Angewendet auf $a = \|x - x_0\|_{\mathbb{R}^n}$ und $b = \|y - y_0\|_{\mathbb{R}^n}$, erhalten wir

$$|x \cdot y - x_0 \cdot y_0| \leq \sqrt{2} \cdot \sqrt{\|x - x_0\|_{\mathbb{R}^n}^2 + \|y - y_0\|_{\mathbb{R}^n}^2} = \sqrt{2} \cdot \|(x, y) - (x_0, y_0)\|_{\mathbb{R}^{2n}}.$$

Dies zeigt, dass das Skalarprodukt auf $B_1(0) \times B_1(0)$ Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante $\sqrt{2}$ ist.

4.4. Häufungspunkte von Folgen in der Ebene

(a) Wir sehen, dass:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \cos\left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right) = 0,$$

da der Kosinus eine beschränkte Funktion ist. Es reicht also, die Folge in der zweiten Komponente zu betrachten. Hierbei bemerken wir, dass:

$$\sin\left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 1, & \text{falls } n = 4k + 1 \\ -1, & \text{falls } n = 4k + 3 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Dies zeigt, dass die Folge jeden der drei Werte $1, 0, -1$ unendlich oft annimmt. Daher sind dies alles Häufungspunkte der Folge in der zweiten Komponente. Kombinieren wir dies mit der Konvergenz der Folge in der ersten Komponente, so sehen wir, dass:

$$(0, 1), (0, 0), (0, -1),$$

die einzigen drei Häufungspunkte sind.

(b) Man beachte, dass:

$$\|a_n\| = \sqrt{n^2 \cos\left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right)^2 + n^2 \sin\left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right)^2} = n.$$

Also geht $|a_n\| \to \infty$ wenn wir $n \to \infty$ gehen lassen. Daher divergiert die Folge und kann aufgrund der Unbeschränktheit jeder Teilfolge keine Häufungspunkte besitzen.

Man kann leicht Folgen mit k Häufungspunkten konstruieren, indem wir die Folge:

$$a_n^{(k)} := \left(\cos\left(n \cdot \frac{2\pi}{k}\right), \sin\left(n \cdot \frac{2\pi}{k}\right)\right), \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

betrachten. Die Folge ist periodisch und nimmt genau k verschiedene Werte im Einheitskreis $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ an. Daher sind alle diese Punkte auch Häufungspunkte. Um unendlich viele Häufungspunkte zu erhalten, kann man z.B. $\frac{2\pi}{k}$ durch $2\pi\alpha$ ersetzen, wobei $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ist. Der Leser kann sich hiervon überzeugen, indem er am Computer die ersten Folgeglieder berechnet und ihr Verhalten analysiert.