7.1. Partielle Ableitungen berechnen

(a) Direktes Berechnen zeigt:

$$\partial_x f_1(x,y) = \cos(x+y^2)e^{x-y} + \sin(x+y^2)e^{x-y},$$

sowie:

$$\partial_y f_1(x,y) = 2y\cos(x+y^2)e^{x-y} - \sin(x+y^2)e^{x-y}.$$

Die Funktion ist stetig differenzierbar, da die beiden partiellen Ableitungen stetig sind. Das Differential lässt sich schreiben als:

$$df_1(x,y) = (\cos(x+y^2)e^{x-y}+\sin(x+y^2)e^{x-y})dx+(2y\cos(x+y^2)e^{x-y}-\sin(x+y^2)e^{x-y})dy$$

Die beste lineare Approximation von f_1 um (x_0, y_0) ist gegeben durch die Funktion:

$$g_1(x,y) := f_1(x_0,y_0) + \partial_x f_1(x_0,y_0)(x-x_0) + \partial_y f_2(x_0,y_0)(y-y_0)$$

Die beste annähernde Ebene in $\mathbb{R}^3$ ist gerade gegeben durch diese lineare Approximation an den Graphen von f_1 ist somit die Menge aller Punkte, welche folgende Gleichung erfüllen:

$$z = f_1(x_0,y_0) + \partial_x f_1(x_0,y_0)(x-x_0) + \partial_y f_1(x_0,y_0)(y-y_0)$$

Setzen wir unsere partiellen Ableitungen an allen Stellen ein, so wird dies:

$$\begin{aligned} z = \sin(x_0+y_0^2)e^{x_0-y_0} &+ \left(\cos(x_0+y_0^2)e^{x_0-y_0} + \sin(x_0+y_0^2)e^{x_0-y_0}\right)(x-x_0) \\ &+ \left(2y_0\cos(x_0+y_0^2)e^{x_0-y_0} - \sin(x_0+y_0^2)e^{x_0-y_0}\right)(y-y_0) \end{aligned}$$

(b) Man sieht, dass der Definitionsbereich gegeben ist durch:

$$\frac{1}{x} + y > 0,$$

sowie $x \neq 0$. In diesen Punkten lässt sich die Funktion definieren und die partiellen Ableitungen berechnen. Direktes Ausrechnen zeigt:

$$\partial_x f_2(x,y) = \frac{1}{\frac{1}{x}+y} \cdot -\frac{1}{x^2} = \frac{-1}{x+x^2y},$$

sowie:

$$\partial_y f_2(x,y) = \frac{1}{\frac{1}{x}+y} = \frac{x}{1+xy}$$

Die Funktion ist stetig differenzierbar, da die beiden partiellen Ableitungen auf dem Definitionsbereich stetig sind. Das Differential lässt sich schreiben als:

$$df_2(x,y) = \frac{-1}{x+x^2y}dx + \frac{x}{1+xy}dy$$

Für alle Punkte (x_0, y_0) im Definitionsbereich finden wir dank den gleichen Argumenten wie in der vorherigen Teilaufgabe für die beste Approximation des Graphen durch eine Ebene:

$$z = \log\left(\frac{1}{x_0} + y_0\right) + \left(\frac{-1}{x_0 + x_0^2 y_0}\right)(x - x_0) + \left(\frac{x_0}{1 + x_0 y_0}\right)(y - y_0)$$

(c) Die Funktion ist überall definiert, aber wegen dem Absolutbetrag wird die Funktion nicht überall differenzierbar sein. Direktes Berechnen zeigt für $x \neq 0$:

$$\partial_x f_3(x,y) = \operatorname{sign}(x) e^{x^2 y} + |x| \cdot 2xy e^{x^2 y},$$

wobei $\operatorname{sign}(x)$ gerade 1 ist, wenn $x > 0$, und -1, wenn $x < 0$. Für $x = 0$, also an den Stellen $(0, y)$, existiert die partielle Ableitung nach x nicht. Des weiteren berechnen wir:

$$\partial_y f_3(x,y) = |x| \cdot x^2 e^{x^2 y}.$$

Die partielle Ableitung nach y existiert auf ganz $\mathbb{R}^2$, hier gibt es keine Probleme mit den Stellen $(0, y)$, da $f_3(0, y) = 0$ als Funktion von y.

Die Funktion ist stetig differenzierbar in allen Punkten mit $x \neq 0$, da die beiden partiellen Ableitungen stetig sind. Das Differential lässt sich schreiben als:

$$df_3(x,y) = (\operatorname{sign}(x) e^{x^2 y} + |x| \cdot 2xy e^{x^2 y})dx + |x| \cdot x^2 e^{x^2 y} dy$$

Falls $x = 0$, so sehen wir:

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f_3(h,y) - f_3(0,y)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{|h| e^{h^2 y}}{h} = \lim_{h \to 0^+} e^{h^2 y} = 1,$$

während:

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f_3(h,y) - f_3(0,y)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{|h| e^{h^2 y}}{h} = \lim_{h \to 0^-} -e^{h^2 y} = -1.$$

Somit ist die partielle x-Ableitung an diesen Stellen nie wohldefiniert/existiert nicht.

Für alle Punkte (x_0, y_0) im Definitionsbereich, in denen f_3 differenzierbar ist, finden wir dank den gleichen Argumenten wie in der ersten Teilaufgabe für die beste Approximation des Graphen durch eine Ebene:

$$z = |x_0| e^{x_0^2 y_0} + \left(\operatorname{sign}(x_0) e^{x_0^2 y_0} + |x_0| \cdot 2x_0 y_0 e^{x_0^2 y_0}\right)(x - x_0) + \left(|x_0| \cdot x_0^2 e^{x_0^2 y_0}\right)(y - y_0)$$

(d) Direktes Berechnen zeigt:

$$\partial_x f_4(x,y) = -\frac{2xy}{(1+x^2)^2} + \sin\left(\sin\left(e^x - e^y\right)\right)\cos\left(e^x - e^y\right)e^x,$$

sowie:

$$\partial_y f_4(x,y) = \frac{1}{1+x^2} - \sin\left(\sin\left(e^x - e^y\right)\right)\cos\left(e^x - e^y\right)e^y.$$

Die Funktion ist stetig differenzierbar, da die beiden partiellen Ableitungen stetig sind. Das Differential lässt sich schreiben als:

$$\begin{aligned} df_4(x,y) = &\left(-\frac{2xy}{(1+x^2)^2} + \sin\left(\sin\left(e^x - e^y\right)\right)\cos\left(e^x - e^y\right)e^x\right)dx \\ &+ \left(\frac{1}{1+x^2} - \sin\left(\sin\left(e^x - e^y\right)\right)\cos\left(e^x - e^y\right)e^y\right)dy \end{aligned}$$

Für alle Punkte (x_0, y_0) im Definitionsbereich finden wir dank den gleichen Argumenten wie in der ersten Teilaufgabe für die beste Approximation des Graphen durch eine Ebene:

$$\begin{aligned} z = &\frac{y_0}{1+x_0^2} - \cos\left(\sin\left(e^{x_0} - e^{y_0}\right)\right) \\ &+ \left(-\frac{2x_0y_0}{(1+x_0^2)^2} + \sin\left(\sin\left(e^{x_0} - e^{y_0}\right)\right)\cos\left(e^{x_0} - e^{y_0}\right)e^{x_0}\right)(x - x_0) \\ &+ \left(\frac{1}{1+x_0^2} - \sin\left(\sin\left(e^{x_0} - e^{y_0}\right)\right)\cos\left(e^{x_0} - e^{y_0}\right)e^{y_0}\right)(y - y_0) \end{aligned}$$

7.2. Partielle Differenzierbarkeit $\neq$ Differenzierbarkeit

In dieser Aufgabe wollen wir beweisen, dass partielle Differenzierbarkeit an einer Stelle nicht ausreicht, um zu folgern, dass die Funktion differenzierbar an ebendieser Stelle ist.

(a) Dank direktem Ausrechnen, können wir sehen, dass die partiellen Ableitungen überall existieren. Genauer, wenn wir x fixieren, so ist die Funktion in y differenzierbar, und wenn wir y fixieren, so ist die Funktion in x differenzierbar. Dies ist höchstens für $x = 0$ oder $y = 0$ nicht ganz klar (da wir sonst den Quotienten zweier glatter Funktionen betrachten, wobei der Nenner nie 0 wird), und hier gilt $f_1(x, 0) = f_1(0, y) = 0$, was ebenfalls in x, respektive y, differenzierbar ist.

Ausrechnen zeigt uns:

$$\partial_x f_1(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2y\sqrt{x^2+y^2} - 2xy\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} = \dfrac{2y^3}{\sqrt{x^2+y^2}^3}, & \text{wenn } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{wenn } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Analog finden wir:

$$\partial_y f_1(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x\sqrt{x^2+y^2} - 2xy\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} = \dfrac{2x^3}{\sqrt{x^2+y^2}^3}, & \text{wenn } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{wenn } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Man beachte, dass die partiellen Ableitungen ausserhalb von $(x,y) = (0,0)$ stetig sind und f_1 somit dort stetig differenzierbar ist.

(b) Wir sehen:

$$\partial_x f_1(0,0) = 0 = \partial_y f_1(0,0),$$

also:

$$df(0,0) = 0$$

Dies bedeutet, wenn f_1 in $(0,0)$ differenzierbar wäre, so müsste der Grenzwert:

$$\lim_{(h_1,h_2)\to 0} \frac{f(h_1,h_2) - f(0,0) - df(0,0)(h_1,h_2)}{|(h_1,h_2)|} = \lim_{(h_1,h_2)\to 0} \frac{2h_1h_2}{h_1^2+h_2^2},$$

existieren und 0 ergeben. Wählen wir aber $(h_1,h_2) = (h,h)$, so sehen wir:

$$\lim_{h\to 0} \frac{2h^2}{2h^2} = \lim_{h\to 0} \frac{2}{2} = 1,$$

ein Widerspruch. Somit ist die Funktion in $(0,0)$ nicht differenzierbar. (Der obige Grenzwert für $(h_1,h_2) \to 0$ existiert übrigens nicht, vergleiche Serie 6, Aufgabe 6.4)

(c) Wir lassen $v = (v_1,v_2)$ einen beliebigen Vektor sein und definieren g_1 wie in der Aufgabenstellung. Dann finden wir:

$$\lim_{h\to 0} \frac{g_1(h) - g_1(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f_1(hv_1,hv_2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2h^2v_1v_2}{h\sqrt{h^2(v_1^2+v_2^2)}} = \lim_{h\to 0} \frac{2hv_1v_2}{|h|\sqrt{v_1^2+v_2^2}}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{2v_1v_2}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}} \operatorname{sign}(h),$$

wobei der Grenzwert, falls $v_1 \neq 0$ und $v_2 \neq 0$, nicht existiert, da sich der letzte Ausdruck für $h > 0$ und $h < 0$ zwei verschiedenen Werten nähert. Falls entweder $v_1 = 0$ oder $v_2 = 0$, dann gilt $g_1(h) - g_1(0) = 0$ für alle h, also existiert der obige Grenzwert trivialerweise und ergibt 0, was mit der Berechnung der partiellen Ableitungen in $(0,0)$ übereinstimmt.

(d) Durch Ausrechnen sehen wir:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f_2(h,0) - f_2(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0,$$

und ferner:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f_2(0,h) - f_2(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-h^3}{h^3} = -1.$$

Also, haben wir:

$$\partial_x f_2(0,0) = 0, \quad \partial_y f_2(0,0) = -1$$

(e) Durch Einsetzen sehen wir:

$$\lim_{h\to 0} \frac{g_2(h) - g_2(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^3(3v_1^2 v_2 - v_2^3)}{h^3(v_1^2 + v_2^2)} = \frac{3v_1^2 v_2 - v_2^3}{v_1^2 + v_2^2} = f_2(v_1, v_2)$$

Dies ist die gesuchte Ableitung.

(f) Nein, denn für $v = (1,0)$ haben wir als Ableitung 0 und für $v = (0,1)$ haben wir -1. Allerdings gilt für $v = (1,1)$:

$$\frac{3-1}{2} = 1 \neq 0 + (-1),$$

also kann die Abbildung nicht linear sein. Somit ist die Funktion f_2 an der Stelle $(0,0)$ nicht differenzierbar. Denn falls das Differenzial $df_2(0,0)$ existieren würde, impliziert die Kettenregel $g_2'(0) = df_2(0,0) \cdot v$, was linear von (v_1, v_2) abhängt.