9.1. Potentiale

(a) Nehmen wir an, es existiert eine Funktion $f(x,y)$ mit $\partial_x f(x,y) = x, \partial_y f(x,y) = ye^{y^2}$. Dann sehen wir sofort, falls wir $f(0,0) = 0$ fixieren (dies ist 'zufällig' gewählt, Potentiale sind bestimmt bis auf die Addition einer Konstanten!):

$$f(x,0) = f(x,0) - f(0,0) = \int_0^x \partial_x f(t,0)\,dt = \int_0^x t\,dt = \frac{1}{2}x^2$$

Ganz analog auch:

$$f(x,y) = f(x,0) + \int_0^y \partial_y f(x,t)dt = \frac{1}{2}x^2 + \int_0^y te^{t^2}dt = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}e^{y^2}$$

Man prüft nun direkt, dass f ein Potential zu λ ist, also $df = \lambda$.

(b) Es sei $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch:

$$\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$$

Man beachte, dass $\gamma(0) = \gamma(2\pi)$. Dann gilt (mit $\cos(t)^2 + \sin(t)^2 = 1$):

$$\begin{aligned}\int_\gamma \lambda &= \int_0^{2\pi} (-\sin(t), \cos(t)) \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sin(t)^2 + \cos(t)^2 dt \\ &= \int_0^{2\pi} 1dt = 2\pi \neq 0,\end{aligned}$$

da aber der Start- und Endpunkt des Pfades γ identisch waren und γ vollständig in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ liegt, folgt daher, dass λ kein Potential auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ besitzen kann.

(c) Man kann hier wie in der ersten Teilaufgabe vorgehen und annehmen, dass f gerade $df = \lambda$ erfüllt und stückweise integrieren mit Kreiskoordinaten. So findet man zum Beispiel für $r > 0$ und $\varphi \in [0, 2\pi[$:

$$\begin{aligned}f(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)) - f(r,0) &= \int_0^\varphi \lambda(r\cos(t), r\sin(t)) \begin{pmatrix} -r\sin(t) \\ r\cos(t) \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^\varphi (r^{-1}\cos(\varphi), r^{-1}\sin(\varphi)) \begin{pmatrix} -r\sin(t) \\ r\cos(t) \end{pmatrix} dt \\ &= 0.\end{aligned}$$

Die Funktion ist also rotationssymmetrisch, und es gilt $f(x,y) = f(\sqrt{x^2+y^2},0)$. Somit können wir nun folgern:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(\sqrt{x^2+y^2},0) \\ &= f(1,0) + \int_1^{\sqrt{x^2+y^2}} \partial_x f(t,0)dt \\ &= f(1,0) + \int_1^{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{1}{t}dt \\ &= f(1,0) + \log(\sqrt{x^2+y^2}) - \log(1) = f(1,0) + \log(\sqrt{x^2+y^2}), \end{aligned}$$

und mit $f(1,0) = 0$ (dies ist 'zufällig' gewählt, Potentiale sind bestimmt bis auf die Addition einer Konstanten!) haben wir den Kandidaten $f(x,y) = \log(\sqrt{x^2+y^2})$. Direktes Nachrechnen beweist, dass f tatsächlich ein Potential ist, also $df = \lambda$.

(d) Es sei $f(x,y)$ eine Funktion mit

$$\begin{aligned} \partial_x f(x,y) &= 4x^3 e^{y^2}, \\ \partial_y f(x,y) &= 2x^4 y e^{y^2} + \frac{1}{1+y^2}. \end{aligned}$$

Dann sehen wir sofort, falls wir $f(0,0) = 1$ (dies ist 'zufällig' gewählt, Potentiale sind bestimmt bis auf die Addition einer Konstanten!) fixieren:

$$f(x,0) - 1 = f(x,0) - f(0,0) = \int_0^x \partial_x f(t,0)\,dt = \int_0^x 4t^3\,dt = x^4.$$

Ganz analog auch:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(x,0) + \int_0^y \partial_y f(x,t)\,dt \\ &= 1 + x^4 + \int_0^y \left(2x^4 t e^{t^2} + \frac{1}{1+t^2}\right) dt \\ &= 1 + x^4 + x^4(e^{y^2} - 1) + \arctan(y) = 1 + x^4 e^{y^2} + \arctan(y). \end{aligned}$$

Man prüft nun direkt, dass f ein Potential zu λ ist, also $df = \lambda$.

9.2. Anwendbarkeit des Satzes von Schwarz

(a) Direktes Berechnen zeigt

$$\begin{aligned} \partial_x f(x,y) &= 2\frac{xy^4}{(x^2+y^2)^2}, \\ \partial_y f(x,y) &= 2\frac{x^4 y}{(x^2+y^2)^2}. \end{aligned}$$

Partielles ableiten von $\partial_x f(x,y)$ nach y und ergibt

$$\partial_y \partial_x f(x,y) = 8\frac{x^3y^3}{(x^2+y^2)^3},$$
$$\partial_x \partial_y f(x,y) = 8\frac{x^3y^3}{(x^2+y^2)^3}.$$

Hier könnte man auch den Satz von Schwarz anwenden anstatt zweimal zu rechnen, da die Funktion auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ glatt, also insbesondere von der Klasse C^2 ist.

(b) Auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ist f offensichtlich stetig differenzierbar, wir müssen also nur den Punkt $(0,0)$ in betracht ziehen. Wir berechnen die partiellen Ableitungen als Limes:

$$\partial_x f(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{0-0}{x} = 0,$$

und analog:

$$\partial_x f(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{0-0}{x} = 0.$$

Um die Stetigkeit an der Stelle $(0,0)$ zu überprüfen, schreiben wir die Formeln oben für die partiellen Ableitungen in Polarkoordinaten um, also $(x,y) = (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))$. Wir finden

$$\partial_x f(x,y) = 2\frac{r\cos(\varphi)r^4\sin(\varphi)^4}{r^4} = 2r\cos(\varphi)^4\sin(\varphi)$$
$$\partial_y f(x,y) = 2\frac{r^4\cos(\varphi)^4 r\sin(\varphi)^4}{r^4} = 2r\cos(\varphi)\sin(\varphi)^4$$

Für eine konvergierende Folge $(x_n,y_n) \to (0,0)$ geht auch $r_n \to 0$, und da $\sin(\varphi_n), \cos(\varphi_n)$ beschränkt bleiben, egal wie sich φ_n verhaltet, folgt $\partial_x f(x_n,y_n) \to 0$, $\partial_y f(x_n,y_n) \to 0$. Die partiellen Ableitungen sind also stetig, und somit $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$.

(c) Wir haben gesehen, dass die Funktion f an der Stelle $(0,0)$ differenzierbar ist und $\partial_x f(0,0) = \partial_y f(0,0) = 0$. Wir nehmen nun die partielle Ableitung nach x an der Stelle $(0,y)$ und berechnen den Limes:

$$\lim_{y\to 0} \frac{\partial_x f(0,y) - \partial_x f(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y} = 0.$$

Analog finden wir

$$\lim_{x\to 0} \frac{\partial_y f(x,0) - \partial_y f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x} = 0.$$

Somit existieren diese partiellen Ableitungen an der Stelle $(0,0)$ und es gilt

$$\partial_y \partial_x f(0,0) = \partial_x \partial_y f(0,0) = 0.$$

(d) Man kann zum Beispiel die Folge $(x_n, y_n) = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ betrachen. Diese Folge erfüllt $(x_n, y_n) \to (0,0)$ wenn $n \to \infty$. Einsetzen in der Formel für $\partial_y \partial_x f$ oben ergibt

$$\partial_y \partial_x f(x_n, y_n) = 8 \frac{\frac{1}{n^3}\frac{1}{n^3}}{(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2})^3} = 8 \frac{\frac{1}{n^6}}{(\frac{2}{n^2})^3} = 8 \frac{1}{2^3} = 1.$$

Somit gilt

$$\lim_{n\to\infty} \partial_y \partial_x f(x_n, y_n) = 1 \neq 0 = \partial_y \partial_x f(0,0),$$

also kann die Funktion $\partial_y \partial_x f$ nicht stetig sein an der Stelle $(0,0)$. Dies zeigt auch, dass $f \notin C^2(\mathbb{R}^2)$, und somit ist der Satz von Schwarz nicht auf die Funktion f anwendbar. Trotzdem, gilt hier $\partial_y \partial_x f(0,0) = \partial_x \partial_y f(0,0)$.

9.3. Die Klassen $C^1(\mathbb{R}^2)$ und $C^2(\mathbb{R}^2)$

(a) Für $(x, y) \neq (0,0)$ ergibt direktes Berechnen:

$$\partial_x f_\alpha(x,y) = y \cos\Big((x^2+y^2)^\alpha\Big) - 2\alpha x^2 y (x^2+y^2)^{\alpha-1} \sin\Big((x^2+y^2)^\alpha\Big),$$
$$\partial_y f_\alpha(x,y) = x \cos\Big((x^2+y^2)^\alpha\Big) - 2\alpha x y^2 (x^2+y^2)^{\alpha-1} \sin\Big((x^2+y^2)^\alpha\Big).$$

An der Stelle $(0,0)$ betrachten wir den Limes des Differentialquotienten:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f_\alpha(x,0) - f_\alpha(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{0-0}{x} = \lim_{x\to 0} 0 = 0,$$
$$\lim_{y\to 0} \frac{f_\alpha(0,y) - f_\alpha(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{0-0}{y} = \lim_{y\to 0} 0 = 0.$$

Somit gilt $\partial_x f_\alpha(0,0) = \partial_y f_\alpha(0,0) = 0$. Um $f_\alpha \in C^1(\mathbb{R}^2)$ zu beweisen, müssen wir zeigen, dass $\partial_x f_\alpha, \partial_y f_\alpha$ stetig sind. Für $(0,0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ist dies offensichtlich. Für die Stelle $(0,0)$ betrachten wir eine Folge $(x_n, y_n) \to (0,0)$, und schreiben in Polarkoordinaten $(x_n, y_n) = (r_n \cos(\varphi_n), r_n \sin(\varphi_n))$. Eingesetzt in die Formel oben, sehen wir

$$\partial_x f_\alpha(x_n, y_n) = r_n \cos(r_n^{2\alpha}) \sin(\varphi_n) - 2\alpha r_n^{2\alpha+1} \sin(r_n^{2\alpha}) \cos^2(\varphi_n) \sin(\varphi_n)$$

und

$$\partial_y f_\alpha(x_n, y_n) = r_n \cos(r_n^{2\alpha}) \cos(\varphi_n) - 2\alpha r_n^{2\alpha+1} \sin(r_n^{2\alpha}) \sin^2(\varphi_n) \cos(\varphi_n)$$

wenn $\alpha \in (-1/2, +\infty)$ für jede Folge $\{(x_k, y_k)\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ mit $(x_k, y_k) \to 0$ $(k \to \infty)$. Daher ist f der Klasse C^1 für $\alpha \in (-1/2, +\infty)$. Da $(x_n, y_n) \to (0,0)$ gilt auch $r_n = \sqrt{x_n^2 + y_n^2} \to 0$. Beachte, dass die trigonometrischen Funktionen für alle (x_n, y_n) beschränkt bleiben. Daher konvergiert der erste Term in den beiden Ausdrücken oben gegen 0. Für den zweiten Term bemerken wir, dass $2\alpha + 1 > 0$ falls $\alpha > -\frac{1}{2}$. In diesem Fall hat $r_n^{2\alpha+1}$ einen positiven Exponenten und der Term konvergiert für $r_n \to 0$ gegen 0. Falls hingegen $\alpha < -\frac{1}{2}$ divergiert der Term für $r_n \to 0$, da $r_n^{2\alpha+1}$ dann einen negativen Exponenten hat. Im Grenzfall $\alpha = -\frac{1}{2}$ verhindert $\sin(r_n^{-1})$ die Konvergenz der Folge. Wir finden also $f_\alpha \in C^1(\mathbb{R}^2)$ falls $\alpha \in]-\frac{1}{2}, \infty[$.

(b) Wir gehen ähnlich vor wie in Teilaufgabe a). Für $(x, y) \neq (0, 0)$ berechnen wir

$$\begin{aligned}
\partial_x^2 f_\alpha(x,y) &= -6\alpha xy(x^2+y^2)^{\alpha-1}\sin((x^2+y^2)^\alpha) - 4\alpha(\alpha-1)x^3y(x^2+y^2)^{\alpha-2}\sin((x^2+y^2)^\alpha)\\
&\quad - 4\alpha^2x^3y(x^2+y^2)^{2\alpha-2}\cos((x^2+y^2)^\alpha),\\
\partial_y\partial_x f_\alpha(x,y) &= \partial_x\partial_y f_\alpha(x,y) = \cos((x^2+y^2)^\alpha) - 2\alpha(x^2+y^2)^\alpha\sin((x^2+y^2)^\alpha)\\
&\quad - 4\alpha(\alpha-1)x^2y^2(x^2+y^2)^{\alpha-2}\sin((x^2+y^2)^\alpha) - 4\alpha^2x^2y^2(x^2+y^2)^{2\alpha-2}\cos((x^2+y^2)^\alpha),\\
\partial_y^2 f_\alpha(x,y) &= -6\alpha xy(x^2+y^2)^{\alpha-1}\sin((x^2+y^2)^\alpha) - 4\alpha(\alpha-1)xy^3(x^2+y^2)^{\alpha-2}\sin((x^2+y^2)^\alpha)\\
&\quad - 4\alpha^2xy^3(x^2+y^2)^{2\alpha-2}\cos((x^2+y^2)^\alpha)
\end{aligned}$$

Nun gehen wir über zum Punkt $(0, 0)$. Die zweiten Ableitungen $\partial_x^2 f_\alpha$ und $\partial_x^2 f_\alpha$ existieren für alle α und ergeben $\partial_x^2 f_\alpha(0, 0) = \partial_y^2 f_\alpha(0, 0) = 0$. Dies sieht man, da bei den ersten Ableitungen $\partial_x f_\alpha(x, 0) = \partial_y f_\alpha(0, y) = 0$ für alle $x \neq 0$ respektive $y \neq 0$. Die gemischten zweiten partiellen Ableitungen existieren hingegen nur wenn $\alpha \geq 0$, und ergeben dann $\partial_y\partial_x f_\alpha(0, 0) = \partial_x\partial_y f_\alpha(0, 0) = 1$. Wenn wir nämlich $\partial_x f_\alpha(0, y)$ auswerten, verschwindet der zweite Term und wir erhalten $\partial_x f_\alpha(0, y) = y\cos(y^{2\alpha})$. Der Differentialquotient ergibt somit

$$\frac{\partial_x f_\alpha(0,y) - \partial_x f_\alpha(0,0)}{y} = \frac{y\cos(y^{2\alpha}) - 0}{y} = \cos(y^{2\alpha}).$$

Dies konvergiert für $\alpha \geq 0$ gegen 1 wenn $y \to 0$, aber für $\alpha < 0$ erhalten wir keine Konvergenz. Für $\alpha < 0$ ist also schon mal sicher $f \notin C^2(\mathbb{R}^2)$. Um die Stetigkeit der zweiten Ableitungen zu untersuchen arbeiten wir wie in Teilaufgabe a) mit Polarkoordinaten. Wir finden für die zwei reinen zweiten Ableitungen

$$\partial_x^2 f_\alpha(x,y) = r^{2\alpha}(\dots), \quad \partial_y^2 f_\alpha(x,y) = r^{2\alpha}(\dots),$$

wobei die Terme in $(\dots)$ beschränkt bleiben wenn $r \to 0$. Dies konvergiert für $\alpha > 0$ gegen 0 und divergiert für $\alpha > 0$ wenn $r \to 0$. Analog schreiben wir für die gemischten zweiten Ableitungen:

$$\partial_y\partial_x f_\alpha(x,y) = \partial_x\partial_y f_\alpha(x,y) = \cos(r^{2\alpha}) + r^{2\alpha}(\dots).$$

Dies konvergiert auch für $\alpha > 0$ gegen 1 wenn $r \to 0$ und divergiert für $\alpha < 0$. Somit sind alle zweiten Ableitungen stetig wenn $\alpha > 0$. Im Grenzfall $\alpha = 0$ sehen wir von den Formeln oben $\partial_y\partial_x f_\alpha(x, y) = \partial_x\partial_y f_\alpha(x, y) = 1$ und $\partial_x^2 f_\alpha(x, y) = \partial_y^2 f_\alpha(x, y) = 0$ konstant auf $\mathbb{R}^2$. Somit ist auch $f_0 \in C^2(\mathbb{R}^2)$. (Dies folgt auch direkt von $f_0(x, y) = xy$.) Wir haben also gezeigt $f_\alpha \in C^2(\mathbb{R}^2)$ für $\alpha \in [0, \infty[$.