10.1. Taylorentwicklung in 2D

(a) Man bemerke, dass man alle partiellen Ableitungen beliebiger Ordnung ausrechnen kann und dass diese stets aus Produkten, Quotienten und Kompositionen stetiger Funktionen wie Polynomen, der Exponentialfunktion oder auch Brüchen mit Nenner, welcher ein Polynom ohne reelle Nullstellen ist, bestehen. Daher sind alle partiellen Ableitungen stetig und somit $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, was genau die gesuchte Aussage ist.

(b) Wir berechnen die Taylorentwicklung direkt. Alternativ könnte man die Potenzreihen-Entwicklungen der Summanden betrachten und so auf die korrekte Lösung kommen.

Zuerst ist klar, dass:

$$f(0,0) = 1$$

Zudem:

$$\begin{aligned}
\partial_x f(x,y) &= 2xe^{x^2+y^2} + \frac{2x}{1+x^2} + \frac{y}{1+x^2y^2} \\
\partial_y f(x,y) &= 2ye^{x^2+y^2} + \frac{x}{1+x^2y^2}
\end{aligned}$$

Direktes Einsetzen zeigt nun also:

$$df(0,0) = (0,0)$$

Wir wenden uns den partiellen Ableitungen zweiter Ordnung zu:

$$\begin{aligned}
\partial_{xx} f(x,y) &= 2e^{x^2+y^2} + 4x^2e^{x^2+y^2} + \frac{2(1+x^2)-4x^2}{(1+x^2)^2} - \frac{2xy^3}{(1+x^2y^2)^2} \\
\partial_{xy} f(x,y) &= 4xye^{x^2+y^2} + \frac{1+x^2y^2-2x^2y^2}{(1+x^2y^2)^2} \\
\partial_{yy} f(x,y) &= 2e^{x^2+y^2} + 4y^2e^{x^2+y^2} - \frac{2x^3y}{(1+x^2y^2)^2}
\end{aligned}$$

Dank des Satzes von Schwarz (Satz 7.5.1) wissen wir zudem $\partial_{xy} f(x,y) = \partial_{yx} f(x,y)$. Einsetzen zeigt:

$$Hess_f(0,0) = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Wir müssen nun noch die partiellen Ableitungen dritter Ordnung bestimmen. Diese verschwinden alle in $(0,0)$, wie wir nun zeigen. Wir müssen nur vier der möglichen

Permutationen von Ableitungen nach x und y berechnen, die anderen Permutationen folgen dank der Symmetrie der Ableitungen, also Satz 7.5.1:

$$\begin{aligned}
\partial_{xxx} f(x,y) &= 12xe^{x^2+y^2} + 8x^3 e^{x^2+y^2} + 2\frac{-2x(1+x^2)^2 - 4x(1-x^2)(1+x^2)}{(1+x^2)^4} \\
&\quad - \frac{2y^3(1+x^2y^2)^2 - 8x^2y^5(1+x^2y^2)}{(1+x^2y^2)^4} \\
\partial_{xxy} f(x,y) &= 4ye^{x^2+y^2} + 8x^2ye^{x^2+y^2} - \frac{6xy^2(1+x^2y^2)^2 - 8x^3y^4(1+x^2y^2)}{(1+x^2y^2)^4} \\
\partial_{xyy} f(x,y) &= 4xe^{x^2+y^2} + 8xy^2e^{x^2+y^2} - \frac{6x^2y(1+x^2y^2)^2 - 8x^4y^3(1+x^2y^2)}{(1+x^2y^2)^4} \\
\partial_{yyy} f(x,y) &= 12ye^{x^2+y^2} + 8y^3e^{x^2+y^2} - \frac{2x^3(1+x^2y^2)^2 - 8x^5y^2(1+x^2y^2)}{(1+x^2y^2)^4}
\end{aligned}$$

Durch Einsetzen sieht man, dass alle partiellen Ableitungen dritter Ordnung verschwinden. Es folgt daher:

$$\begin{aligned}
T_f^3((x,y);(0,0)) &= f(0,0) + \partial_x f(0,0)x + \partial_y f(0,0)y + \frac{1}{2}\partial_{xx} f(0,0)x^2 \\
&\quad + \partial_{xy} f(0,0)xy + \frac{1}{2}\partial_{yy} f(0,0)y^2 + \frac{1}{6}\partial_{xxx} f(0,0)x^3 + \frac{1}{2}\partial_{xxy} f(0,0)x^2y \\
&\quad + \frac{1}{2}\partial_{xyy} f(0,0)xy^2 + \frac{1}{6}\partial_{yyy} f(0,0)y^3 \\
&= 1 + 2x^2 + xy + y^2
\end{aligned}$$

(c) Wir setzten $y = x$ und berechnen:

$$g(x) = f(x,x) = e^{2x^2} + \log(1+x^2) + \arctan(x^2)$$

Wir betrachten die drei Summanden separat. Für die folgenden Funktionen sind die Taylor-Entwicklungen um $t = 0$ bis zweiter Ordnung gegeben durch:

$$\begin{aligned}
e^t &\simeq 1 + t + \frac{t^2}{2} \\
\log(1+t) &\simeq t - \frac{t^2}{2} \\
\arctan(t) &\simeq t
\end{aligned}$$

Setzen wir nun $2x^2$ bzw. x^2 ein für t, so finden wir also:

$$\begin{aligned}
e^{2x^2} &\simeq 1 + 2x^2 + \frac{4x^4}{2} \\
\log(1+x^2) &\simeq x^2 - \frac{x^4}{2} \\
\arctan(x^2) &\simeq x^2
\end{aligned}$$

Dies sind die Taylorpolynome bis 4.Grades. Somit sehen wir aber auch:

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x,x) \\ &= e^{2x^2} + \log(1+x^2) + \arctan(x^2) \\ &\simeq 1 + 4x^2 = T_g^3(x;0), \end{aligned}$$

was somit, aufgrund der Linearität der Taylor-Entwicklung, das Taylorpolynom dritten Grades von g ist (den x^4 Term haben wir weggeworfen, da nur nach der Taylor-Entwicklung bis dritte Ordnung gefragt wurde). Alternativ kann man das Taylorpolynom direkt durch Ableiten von $g(x)$ finden.

Setzen wir im Taylorpolynom 3.Grades zu $f(x,y)$ nun $x = y$, so sehen wir:

$$T_f^3((x,x);(0,0)) = 1 + 4x^2,$$

also:

$$T_f^3((x,x);(0,0)) = T_g^3(x;0)$$

Dies illustriert den Zusammenhang aus Bemerkung 7.5.2.

10.2. Hesse-Matrizen

(a) $f_1(x,y) := \arctan(xy)$

Wir finden sofort, dass f_1 glatt ist, also $C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Daher reicht es, nach Satz von Schwarz (Satz 7.5.1), die folgenden Ableitungen zu kennen:

$$\begin{aligned} \partial_{xx} f_1(x,y) &= \frac{-2xy^3}{(1+x^2y^2)^2} \\ \partial_{xy} f_1(x,y) &= \frac{1-x^2y^2}{(1+x^2y^2)^2} \\ \partial_{yy} f_1(x,y) &= \frac{-2x^3y}{(1+x^2y^2)^2} \end{aligned}$$

Die Hesse-Matrix in $(0,0)$ ist dann:

$$Hess_{f_1}(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und diejenige in $(1,-1)$:

$$Hess_{f_1}(1,-1) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Man bemerke, dass die Hesse-Matrix in $(0,0)$ indefinit ist, da $(1,1)$ ein Eigenvektor zum Eigenwert 1 ist und $(1,-1)$ ein Eigenvektor zum Eigenwert -1 ist. Also besitzt die Matrix positive und negative Eigenwerte, ist also indefinit. Betrachtet man das Differential:

$$df_1(x,y) = \left(\frac{y}{1+x^2y^2}, \frac{x}{1+x^2y^2}\right),$$

so sehen wir, dass $(x,y) = (0,0)$ ein kritischer Punkt ist und somit also tatsächlich ein Sattelpunkt.

(b) $f_2(x,y) := ye^{xy}$

Wir finden sofort, dass f_2 glatt ist, also $C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Daher reicht es, nach Satz von Schwarz (Satz 7.5.1), die folgenden Ableitungen zu kennen:

$$\begin{aligned}
\partial_{xx} f_2(x,y) &= y^3 e^{xy} \\
\partial_{xy} f_2(x,y) &= 2ye^{xy} + xy^2 e^{xy} \\
\partial_{yy} f_2(x,y) &= 2xe^{xy} + x^2 y e^{xy}
\end{aligned}$$

Die Hesse-Matrix in $(0,0)$ ist dann:

$$Hess_{f_2}(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und diejenige in $(1,-1)$:

$$Hess_{f_2}(1,-1) = \begin{pmatrix} -e^{-1} & -e^{-1} \\ -e^{-1} & e^{-1} \end{pmatrix}$$

Man bemerke, dass die Hesse-Matrix in $(0,0)$ nur den Eigenwert 0 besitzt, also weder positiv, negativ noch indefinit. Betrachtet man das Differential:

$$df_2(x,y) = \left(y^2 e^{xy}, e^{xy} + xye^{xy}\right),$$

so sehen wir, dass $(x,y) = (0,0)$ kein kritischer Punkt ist. Also kann dies kein lokales Extremum oder Sattelpunkt sein.

In $(1,-1)$ sehen wir, dass die Hesse-Matrix gerade Spur (d.h. Summe der Diagonalelemente) 0 hat. Das bedeutet, dass die Eigenwerte sich zu 0 summieren. Da die Determinante zudem negativ ist, folgt, dass die Hessematrix in $(1,-1)$ sowohl positive als auch negative Eigenwerte besitzt. Somit ist diese indefinit. Da aber $(1,-1)$ nicht kritisch ist, ist dies sicher kein lokales Extremum oder Sattelpunkt.

(c) $f_3(x,y) := \log(1+x^2+y^2)$

Wir finden sofort, dass f_3 glatt ist, also $C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Daher reicht es, nach Satz von Schwarz (Satz 7.5.1), die folgenden Ableitungen zu kennen:

$$\begin{aligned}
\partial_{xx} f_3(x,y) &= \frac{2-2x^2+2y^2}{(1+x^2+y^2)^2} \\
\partial_{xy} f_3(x,y) &= \frac{-4xy}{(1+x^2+y^2)^2} \\
\partial_{yy} f_3(x,y) &= \frac{2+2x^2-2y^2}{(1+x^2+y^2)^2}
\end{aligned}$$

Die Hesse-Matrix in $(0,0)$ ist dann:

$$Hess_{f_3}(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

und diejenige in $(1,-1)$:

$$Hess_{f_3}(1,-1) = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{2}{9} \end{pmatrix}$$

Man bemerke, dass die Hesse-Matrix in $(0,0)$ nur den Eigenwert 2 besitzt, also positiv definit ist. Betrachtet man das Differential:

$$df_3(x,y) = \left(\frac{2x}{1+x^2+y^2}, \frac{2y}{1+x^2+y^2}\right),$$

so sehen wir, dass $(x,y) = (0,0)$ ein kritischer Punkt ist. Also ist der Punkt $(0,0)$ ein lokales Minimum.

In $(1,-1)$ sehen wir, dass $(1,1)$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $\frac{2}{3}$ ist und $(1,-1)$ einer zum Eigenwert $-\frac{2}{9}$. Somit ist die Hessematrix dort indefinit, aber da $(1,-1)$ nicht kritisch ist, ist dies kein Sattelpunkt.

(d) $f_4(x,y) := \frac{x}{2-e^{-y^2}}$

Wir finden sofort, dass f_4 glatt ist, also $C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Daher reicht es, nach Satz von Schwarz (Satz 7.5.1), die folgenden Ableitungen zu kennen:

$$\begin{aligned}
\partial_{xx} f_4(x,y) &= 0 \\
\partial_{xy} f_4(x,y) &= \frac{-2ye^{-y^2}}{(2-e^{-y^2})^2} \\
\partial_{yy} f_4(x,y) &= \frac{(-2xe^{-y^2}+4xy^2e^{-y^2})(2-e^{-y^2})^2 + 8xy^2e^{-2y^2}(2-e^{-y^2})}{(2-e^{-y^2})^4}
\end{aligned}$$

Die Hesse-Matrix in $(0,0)$ ist dann:

$$Hess_{f_4}(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und diejenige in $(1,-1)$:

$$Hess_{f_4}(1,-1) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2e^{-1}}{(2-e^{-1})^2} \\ \frac{2e^{-1}}{(2-e^{-1})^2} & \frac{4e^{-1}+6e^{-2}}{(2-e^{-1})^3} \end{pmatrix}$$

Man bemerke, dass die Hesse-Matrix in $(0,0)$ nur den Eigenwert 0 besitzt, also weder positiv, negativ noch indefinit ist. Betrachtet man das Differential:

$$df_4(x,y) = \left(\frac{1}{2-e^{-y^2}}, \frac{-2xye^{-y^2}}{(2-e^{-y^2})^2} \right),$$

so sehen wir, dass $(x,y) = (0,0)$ kein kritischer Punkt ist. Also kann dies kein lokales Extremum oder Sattelpunkt sein.

In $(1,-1)$ ist die Determinante sicherlich negativ, die Summe der Diagonalelemente aber positiv. Daher muss die Hesse-Matrix positive und negative Eigenwerte besitzen. Folglich ist die Hesse-Matrix indefinit. Der Punkt $(1,-1)$ ist aber kein Sattelpunkt, da er nicht kritisch ist.

10.3. Kritische Punkte Wir berechenen

$$\begin{aligned} \partial_x f(x,y,z) &= 2x - 4y, \\ \partial_y f(x,y,z) &= 2ay - 4x, \\ \partial_z f(x,y,z) &= 2z. \end{aligned}$$

Die kritische Punkte von f sind die Lösungen des folgenden Gleichungssystems:

$$\begin{cases} 2x - 4y = 0 \\ 2ay - 4x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Daher ist $(0,0,0)$ der einzige kritische Punkt von f, $\forall\, a \in \mathbb{R} \setminus \{4\}$.

Wir berechenen

$$\begin{aligned}
\partial_{xx} f(x,y,z) &= 2,\\
\partial_{xy} f(x,y,z) &= -4,\\
\partial_{xz} f(x,y,z) &= 0,\\
\partial_{yy} f(x,y,z) &= 2a,\\
\partial_{yz} f(x,y,z) &= 0,\\
\partial_{zz} f(x,y,z) &= 2.
\end{aligned}$$

Man beachte, dass die Hesse-Matrix von f symmetrisch ist, weil f von der Klasse C^2 ist (Satz von Schwarz). Daher,

$$Hess_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ -4 & 2a & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \forall\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

Wir berechnen

$$\begin{aligned}
\det\Big(Hess_f(0,0,0) - \lambda \mathbb{I}_3\Big) &= \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -4 & 0 \\ -4 & 2a-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}\\
&= (2-\lambda)\Big((2-\lambda)(2a-\lambda) - 16\Big)\\
&= (2-\lambda)\Big(\lambda^2 - 2(a+1)\lambda + 4(a-4)\Big).
\end{aligned}$$

Daher sind die Eigenwerte von $Hess_f(0,0,0)$ gegeben durch

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &:= 2,\\
\lambda_2 &:= a+1+\sqrt{(a-1)^2+16},\\
\lambda_3 &:= a+1-\sqrt{(a-1)^2+16}.
\end{aligned}$$

Wenn $a > 4$, dann gilt $\lambda_2 > \lambda_3 > 0$. Daher ist $Hess_f(0,0,0)$ positiv definit und $(0,0,0)$ ist ein lokales Minimum von f. Wenn $a < 4$, dann ist mindestens einer der Eigenwerte λ_2 und λ_3 negativ. Daher ist $Hess_f(0,0,0)$ indefinit und $(0,0,0)$ ist ein Sattelpunkt von f.