11.1. Kettenregel

(a) Wir berechnen zuerst die Komposition durch Einsetzten der Komponenten vom Vektor $g(x_1, x_2)$ in f, also $f \circ g(x_1, x_2) = f(g_1(x_1, x_2), g_2(x_1, x_2))$:

$$f \circ g(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1^3 x_2 + 2x_1^2 x_2^2 + x_1 x_2^3 + e^{x_1+x_2} \\ (x_1^2 x_2 + x_1 x_2)e^{x_1+x_2}) \end{pmatrix}$$

Das Differential lässt sich nun direkt aus den partiellen Ableitung berechnen, nämlich

$$d(f \circ g) = \begin{pmatrix} \partial_{x_1}(f \circ g)_1 & \partial_{x_2}(f \circ g)_1 \\ \partial_{x_1}(f \circ g)_2 & \partial_{x_2}(f \circ g)_2 \end{pmatrix}$$

Wir finden:

$$d(f \circ g)(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 3x_1^2 x_2 + 4x_1 x_2^2 + x_2^3 + e^{x_1+x_2} & x_1^3 + 4x_1^2 x_2 + 3x_1 x_2^2 + e^{x_1+x_2} \\ (x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 + 2x_1 x_2 + x_2^2)\, e^{x_1+x_2} & (x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 + x_1^2 + 2x_1 x_2)\, e^{x_1+x_2} \end{pmatrix}$$

Wir gehen nun mit Hilfe der Kettenregel vor. Dazu berechnen wir zuerst die jeweiligen Differentiale von f und g:

$$df(y_1, y_2, y_3) = \begin{pmatrix} y_2 & y_1 & 1 \\ y_2 e^{y_1} & e^{y_1} & 0 \end{pmatrix},$$

sowie:

$$dg(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2x_1 x_2 + x_2^2 & x_1^2 + 2x_1 x_2 \\ e^{x_1+x_2} & e^{x_1+x_2} \end{pmatrix},$$

Dank der Kettenregel gilt:

$$\begin{aligned}
d\,(f \circ g)\,(x_1, x_2) &= df(g(x_1, x_2)) \cdot dg(x_1, x_2) \\
&= \begin{pmatrix} x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 & x_1 + x_2 & 1 \\ (x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2)\, e^{x_1+x_2} & e^{x_1+x_2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2x_1 x_2 + x_2^2 & x_1^2 + 2x_1 x_2 \\ e^{x_1+x_2} & e^{x_1+x_2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 + (x_1 + x_2)(2x_1 x_2 + x_2^2) + e^{x_1+x_2} & x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 + (x_1 + x_2)(x_1^2 + 2x_1 x_2) + e^{x_1+x_2} \\ (x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2)\, e^{x_1+x_2} + (2x_1 x_2 + x_2^2) e^{x_1+x_2} & (x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2)\, e^{x_1+x_2} + (x_1^2 + 2x_1 x_2) e^{x_1+x_2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3x_1^2 x_2 + 4x_1 x_2^2 + x_2^3 + e^{x_1+x_2} & x_1^3 + 4x_1^2 x_2 + 3x_1 x_2^2 + e^{x_1+x_2} \\ (x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 + 2x_1 x_2 + x_2^2)\, e^{x_1+x_2} & (x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 + x_1^2 + 2x_1 x_2)\, e^{x_1+x_2} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Wir sehen, dass die Resultate miteinander übereinstimmen.

(b) Wie in der vorherigen Teilaufgabe berechnen wir zuerst die Komposition:

$$f \circ g(x) = f(\cos(x), \sin(x), x) = \begin{pmatrix} \cos(x)^2 + \sin(x)^2 + x^2 \\ x\sin(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + x^2 \\ x\sin(x) \end{pmatrix}$$

Das Differential der Komposition ergibt:

$$d(f \circ g)(x) = \begin{pmatrix} 2x \\ \sin(x) + x\cos(x) \end{pmatrix}$$

Um andererseits mit der Kettenregel vorzugehen, berechnen wir df und dg:

$$df(y_1, y_2, y_3) = \begin{pmatrix} 2y_1 & 2y_2 & 2y_3 \\ 0 & y_3 & y_2 \end{pmatrix}, \qquad dg(x) = \begin{pmatrix} -\sin(x) \\ \cos(x) \\ 1 \end{pmatrix}$$

Unter Verwendung der Kettenregel ergibt sich:

$$\begin{aligned} d(f \circ g)(x) &= df(g(x)) \cdot dg(x) \\ &= \begin{pmatrix} 2\cos(x) & 2\sin(x) & 2x \\ 0 & x & \sin(x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(x) \\ \cos(x) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ x\cos(x) + \sin(x) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(c) Wir müssen hier die Komposition von drei Funktionen berechnen. Wir gehen schrittweise vor und berechnen zuerst $g \circ h$:

$$g \circ h(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 2x_1 - 2e^{-x_2} - x_1x_3 + x_2x_3 \\ x_1 - e^{-x_2} \end{pmatrix}$$

Wir setzen nun diese Funktion in f ein:

$$f \circ g \circ h(x_1, x_2, x_3) = \log(1 + (x_1 - e^{-x_2})^2) = \log(1 + x_1^2 - 2x_1e^{-x_2} + e^{-2x_2})$$

Berechnen des Differentials ergibt:

$$d(f \circ g \circ h)(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} \frac{2x_1 - 2e^{-x_2}}{1 + x_1^2 - 2x_1e^{-x_2} + e^{-2x_2}} & \frac{2x_1e^{-x_2} - 2e^{-2x_2}}{1 + x_1^2 - 2x_1e^{-x_2} + e^{-2x_2}} & 0 \end{pmatrix}$$

Wir gehen nun mit der Kettenregel vor. Die jeweiligen Differentiale sind

$$\begin{aligned} df(z_1, z_2) &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{2z_2}{1+z_2^2} \end{pmatrix} \\ dg(y_1, y_2) &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ dh(x_1, x_2, x_3) &= \begin{pmatrix} 1 & e^{-x_2} & 0 \\ x_3 & -x_3 & x_1 - x_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Zweimaliges Anwenden der Kettenregel auf $d(f \circ g \circ h)$ ergibt:

$$\begin{aligned} d(f \circ g \circ h)(x_1, x_2, x_3) &= d(f \circ g)(h(x_1, x_2, x_3)) \cdot dh(x_1, x_2, x_3) \\ &= df(g(h(x_1, x_2, x_3))) \cdot dg(h(x_1, x_2, x_3)) \cdot dh(x_1, x_2, x_3). \end{aligned}$$

Wir berechnen:

$$df(g(h(x_1, x_2, x_3))) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2x_1 - 2e^{-x_2}}{1 + x_1^2 - 2x_1 e^{-x_2} + e^{-2x_2}} \end{pmatrix}, \qquad dg(h(x_1, x_2, x_3)) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Zusammengesetzt ergibt sich:

$$\begin{aligned} d(f \circ g \circ h)(x_1, x_2, x_3) &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{2x_1 - 2e^{-x_2}}{1 + x_1^2 - 2x_1 e^{-x_2} + e^{-2x_2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & e^{-x_2} & 0 \\ x_3 & -x_3 & x_1 - x_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{2x_1 - 2e^{-x_2}}{1 + x_1^2 - 2x_1 e^{-x_2} + e^{-2x_2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 - x_3 & 2e^{-x_2} + x_3 & x_2 - x_1 \\ 1 & e^{-x_2} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{2x_1 - 2e^{-x_2}}{1 + x_1^2 - 2x_1 e^{-x_2} + e^{-2x_2}} & \frac{2x_1 e^{-x_2} - 2e^{-2x_2}}{1 + x_1^2 - 2x_1 e^{-x_2} + e^{-2x_2}} & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

was natürlich das selbe Resultat wie oben ist.

11.2. Kugelkoordinaten

(a) Man kann sehen, dass $r \mapsto \Phi(r, \theta_0, \varphi_0)$ Strahlen ausgehend vom Ursprung (wobei der Ursprung bei $r = 0$ nicht dazu gehört) in eine beliebige Richtung sind, welche durch die Winkel θ_0, φ_0 bestimmt wird. Aufgrund der Einschränkungen für θ_0, φ_0 kann der Strahl aber nicht in Richtung eines Vektors $v = (v_1, v_2, v_3)$ mit $v_2 = 0$ und $v_1 \leq 0$ zeigen.

Für $\theta \mapsto \Phi(r_0, \theta, \varphi_0)$ bemerke man, dass dies Halbkreise zwischen den Polen $(0, 0, r_0)$ und $(0, 0, -r_0)$ sind. Alle Halbkreise ausser demjenigen in der xz-Ebene mit negativen x-Koordinaten sind möglich.

Die Abbildung $\varphi \mapsto \Phi(r_0, \theta_0, \varphi)$ parametrisiert den Schnitt der Sphäre mit Radius r_0 und einer zur xy-Ebene parallelen Ebene. Man beachte, dass die Parametrisierung jeweils den Punkt mit verschwindender y-Koordinate und negativer x-Koordinate auslässt, da dort $\varphi = \pm\pi$ nötig wäre.

Für eine Skizze betrachte man die Wikipedia-Seite zu Kugelkoordinaten.

(b) Das Bild von Φ ist:

$$\mathrm{Im}(\Phi) = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; y \neq 0 \text{ oder } x > 0 \right\}$$

Das bedeutet, das Bild umfasst alle Punkte, welche nicht in der abgeschlossenen Halbebene gegeben durch $y = 0$ sowie $x \leq 0$ liegen. Dabei ist die z-Achse ausgeschlossen, da dort θ den Wert π oder $-\pi$ annehmen müsste, und die offene Halbebene $\{x < 0, y = 0\}$ ist ausgeschlossen, da dort φ den Wert π oder $-\pi$ annehmen müsste.

(c) Wir berechnen das Differential, a.k.a. Jacobimatrix, der Abbildung:

$$d\Phi(r,\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} \sin(\theta)\cos(\varphi) & r\cos(\theta)\cos(\varphi) & -r\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ \sin(\theta)\sin(\varphi) & r\cos(\theta)\sin(\varphi) & r\sin(\theta)\cos(\varphi) \\ \cos(\theta) & -r\sin(\theta) & 0 \end{pmatrix}$$

Es gilt nun also:

$$\begin{aligned} &\det\left(d\Phi(r,\theta,\varphi)\right) \\ &= \cos(\theta)\left(r^2\cos(\theta)\sin(\theta)\cos(\varphi)^2 + r^2\sin(\theta)\cos(\theta)\sin(\varphi)^2\right) \\ &+ r\sin(\theta)\left(r\sin(\theta)^2\cos(\varphi)^2 + r\sin(\theta)^2\sin(\varphi)^2\right) \\ &= r^2\cos(\theta)^2\sin(\theta) + r^2\sin(\theta)^3 \\ &= r^2\sin(\theta), \end{aligned}$$

was die gesuchte Formel ist.

(d) Man bemerke zuerst, dass Φ injektiv ist. Dazu bemerke man, dass wenn

$$\Phi(r,\theta,\varphi) = \Phi(r',\theta',\varphi'),$$

dann findet man dank der Norm:

$$r = \|\Phi(r,\theta,\varphi)\| = \|\Phi(r',\theta',\varphi')\| = r'$$

Somit also auch von der Gleichheit der dritten Komponenten:

$$r\cos(\theta) = r'\cos(\theta') = r\cos(\theta'),$$

was dank $r > 0$ zu einer Gleichheit der Kosinus führt. Da aber der Kosinus auf $]0,\pi[$ injektiv ist, folgt $\theta = \theta'$. Die ersten beiden Komponenten von Φ lassen sich analog nun reduzieren zu:

$$\sin(\varphi) = \sin(\varphi'), \quad \cos(\varphi) = \cos(\varphi'),$$

denn $r, \sin(\theta) \neq 0$. Dies ist aber in $]-\pi,\pi[$ nur möglich, falls $\varphi = \varphi'$. Also ist Φ injektiv. Per Definition von Bild ist Φ auch surjektiv auf sein Bild. Also Φ ist eine Bijektion auf sein Bild und besitzt somit eine Umkehrfunktion Φ^{-1}, definiert auf dem Bild von Φ.

Man bemerke nun, dass für alle (r, θ, φ) im Definitionsbereich gilt, dass:

$$\det\left(d\Phi(r, \theta, \varphi)\right) = r^2 \sin(\theta) > 0,$$

also ist das Differential an jeder Stelle invertierbar. Somit folgt gemäss dem Umkehrsatz, dass die Abbildung Φ in einer Umgebung von jedem Punkt im Bild eine lokale Inverse von der Klasse C^1 besitzt. Da eine Inverse von einer bijektiven Funktion eindeutig bestimmt ist, muss diese lokale Inverse mit der globalen Inverse Φ^{-1} übereinstimmen. Dies zeigt, dass Φ^{-1} in einer Umgebung von jedem Punkt C^1 ist. Da Differenzierbarkeit und Stetigkeit lokale Eigenschaften sind, ist Φ^{-1} also eine C^1-Abbildung auf dem gesamten Bild und Φ somit ein Diffeomorphismus.

Anstatt den Umkehrsatz zu verwenden, könnte man hier natürlich auch explizit die Inverse zu Φ bestimmen und zeigen, dass diese C^1 ist.

11.3. Zylinderkoordinaten

(a) Man kann analog zu den Kugelkoordinaten argumentieren. Da die Ergebnisse leichter zu erhalten sind, verweisen wir einfach auf den folgenden Link für eine Darstellung der entsprechenden 'Koordinaten-Achsen':

`https://de.wikipedia.org/wiki/Polarkoordinaten#Zylinderkoordinaten`

(b) Das Bild ist dasselbe wie für die Kugelkoordinaten, also

$$\mathrm{Im}(\Phi) = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0,\ x \leq 0\}.$$

Dies lässt sich ähnlich wie in der vorherigen Teilaufgabe erkennen. Auch hier impliziert $\varphi \in]-\pi, \pi[$, dass die offene Halbebene gegeben durch $y = 0$, $x < 0$ vom Bild ausgeschlossen ist. Die z-Achse ist diesmal durch die Bedingung $r \neq 0$ ausgeschlossen.

(c) Man kann direkt berechnen, dass

$$d\Phi(r, \varphi, h) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & r\cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Determinante lässt sich also leicht bestimmen:

$$\begin{aligned} &\det\left(d\Phi(r, \varphi, h)\right) \\ &= \cos(\varphi) \cdot r\cos(\varphi) - \sin(\varphi) \cdot (-r\sin(\varphi)) \\ &= r \end{aligned}$$

(d) Das lässt sich analog zu den Kugelkoordinaten mittels dem Umkehrsatz folgern. Man bemerke nämlich, dass wegen $r > 0$ stets die Determinante der Jacobi-Matrix $\neq 0$ ist, also ist das Differential invertierbar. Somit ist Φ lokal invertierbar, d.h. jeder Punkt besitzt eine Umgebung, in der Φ ein Diffeomorphismus auf das Bild der Umgebung ist. Wenn also die Inverse global definiert ist, so ist sie in der Nähe jedes Bildpunktes differenzierbar und sogar C^1, also eine C^1-Abbildung.

Für die Wohldefiniertheit der Inversen zu Φ muss nur noch Injektivität nachgewiesen werden. Dazu bemerken wir, dass für $\Phi(r, \varphi, h) = \Phi(r', \varphi', h')$ sofort gelten muss:

$$h = h'$$

Zudem auch:

$$r^2 = (r\cos(\varphi))^2 + (r\sin(\varphi))^2 = (r'\cos(\varphi'))^2 + (r'\sin(\varphi'))^2 = r'^2,$$

also auch $r = r'$. Um $\varphi = \varphi'$ zu erhalten, argumentiert man wie in der vorherigen Aufgabe. Damit ist die Funktion Φ injektiv.