12.1. Extrema mit Nebenbedingungen

(a) Man beachte, dass $h(x,y) := x^2 + y^2$ als Polynom stetig ist und somit sind $\overline{B_1(0)} = h^{-1}([0,1])$ und $S^1 = h^{-1}(\{1\})$ abgeschlossene Mengen (als Urbilder abgeschlossener Mengen unter einer stetigen Funktion). Das kann auch mittels der Resultate aus der Vorlesung direkt eingesehen werden. Da beide Mengen auch beschränkt sind, sind beide also kompakt.

Da die Funktion f als Polynom stetig ist, folgt also gemäss Extremumssatz, dass f sein Maximum und Minimum auf beiden Mengen annimmt.

(b) Gemäss Satz 7.9.1 existiert in den Extrema (x,y) von f jeweils ein $\lambda \in \mathbb{R}$, sodass:

$$(0,0) = df(x,y) + \lambda \cdot dh(x,y) = (y + 2\lambda x, x + 2\lambda y)$$

Das heisst, die Extrema erfüllen folgende drei Gleichungen für ein geeignetes λ:

$$\begin{aligned} x &= -2\lambda y \\ y &= -2\lambda x \\ 1 &= x^2 + y^2 \end{aligned}$$

Man sieht also dank der ersten beiden Gleichungen:

$$x^2 + y^2 = 4\lambda^2(x^2 + y^2),$$

und somit:

$$\lambda = \pm\frac{1}{2}$$

Dies impliziert nun, falls $\lambda = 1/2$:

$$x = -y,$$

und falls $\lambda = -1/2$:

$$x = y$$

In beiden Fällen gilt:

$$x^2 + y^2 = 2x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Somit sind die kritischen Punkte genau:

$$(x,y) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Direktes Einsetzen zeigt nun, dass f das folgende Maximum:

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2},$$

und das folgende Minimum:

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=f\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-\frac{1}{2},$$

auf S^1 besitzt.

(c) Man bemerke, dass $\varphi\in[0,2\pi]\mapsto(\cos(\varphi),\sin(\varphi))$ genau den Kreis S^1 parametrisiert. Also sind die Extrema von f und $\tilde{f}$ identisch.

Einsetzen zeigt:

$$\tilde{f}(\varphi)=\cos(\varphi)\sin(\varphi)=\frac{1}{2}\sin(2\varphi)$$

Dank Ableiten finden wir die kritischen Punkte:

$$0=\tilde{f}'(\varphi)=\cos(2\varphi)\Rightarrow 2\varphi\in\frac{\pi}{2}+\mathbb{Z},$$

d.h., da wir uns auf das Intervall $[0,2\pi]$ beschränken:

$$\varphi=\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4},\frac{7\pi}{4}$$

Einsetzen zeigt uns:

$$\tilde{f}\left(\frac{\pi}{4}\right)=\tilde{f}\left(\frac{5\pi}{4}\right)=\frac{1}{2},$$

und:

$$\tilde{f}\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\tilde{f}\left(\frac{7\pi}{4}\right)=-\frac{1}{2}.$$

Durch Einsetzen in die Parametrisierung $(\cos(\varphi),\sin(\varphi))$ sehen wir auch

$$(\cos(\frac{\pi}{4}),\sin(\frac{\pi}{4}))=(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}),\quad(\cos(\frac{3\pi}{4}),\sin(\frac{3\pi}{4}))=(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}),$$
$$(\cos(\frac{5\pi}{4}),\sin(\frac{5\pi}{4}))=(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}),\quad(\cos(\frac{7\pi}{4}),\sin(\frac{7\pi}{4}))=(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})$$

Wir finden also dieselben Extrema wie zuvor.

(d) Wir bemerken, dass die Extrema von f entweder im Inneren von $\overline{B_1(0)}$, also in $B_1(0)$ liegen oder auf dem Rand, nämlich S^1. Im ersten Fall untersuchen wir die Gleichung

$$df(x,y)=(0,0)$$

für $(x,y)\in B_1(0)$, denn dann muss (x,y) ein kritischer Punkt von f sein, siehe Satz 7.5.3. Da

$$df(x,y)=(y,x),$$

impliziert die Gleichung oben $(x, y) = (0, 0)$, was tatsächlich in $B_1(0)$ liegt. Dort gilt nun:

$$f(0, 0) = 0.$$

Auf S^1 haben wir die kritischen Punkte bereits berechnet und gesehen, dass

$$(x, y) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

genau die kritischen Punkte sind und dort $1/2$ das Maximum und $-1/2$ das Minimum ist. Somit gilt:

$$\max_{x \in \overline{B_1(0)}} f(x, y) = \frac{1}{2}, \quad \min_{x \in \overline{B_1(0)}} f(x, y) = -\frac{1}{2}$$

12.2. Satz von der Impliziten Funktion

Wir wollen die folgende Gleichung lösen:

$$f(x, y, z) := e^{x^2} y + e^{z^2} \arctan x + \log(1 + x^2 y^2) = 1$$

(a) Dies folgt durch Einsetzen.

(b) Es gilt:

$$\partial_y f(0, 1, 0) = e^{0^2} + \frac{2 \cdot 0^2 \cdot 1}{1 + 0^2 \cdot 1^2} = 1 \neq 0$$

Zudem kann man auch sehen:

$$\partial_x f(0, 1, 0) = 1, \quad \partial_z f(0, 1, 0) = 0$$

(c) Der erste Teil der Aufgabe ist eine direkte Anwendung des Satzes über implizite Funktionen. Man beachte, dass die nicht-verschwindende Ableitung aus der vorherigen Teilaufgabe hierfür essenziell ist. Um $dg(0, 0)$ zu bestimmen, betrachte man die Funktion:

$$h(x, z) = (x, g(x, z), z).$$

Diese Funktion ist C^1 und erfüllt für alle (x, z) in der Nähe von $(0, 0)$:

$$f(h(g, z)) = 1.$$

Wir werten auf beiden Seiten der obigen Gleichung das Differenzial an der Stelle $(x, z) = (0, 0)$ aus und wenden die Kettenregel an:

$$\begin{aligned}
(0,0) &= d\,(f \circ h)\,(0,0) \\
&= df(h(0,0))dh(0,0) \\
&= df(0,1,0)dh(0,0) \\
&= \begin{pmatrix} \partial_x f(0,1,0) & \partial_y f(0,1,0) & \partial_z f(0,1,0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \partial_x g(0,0) & \partial_z g(0,0) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \partial_x g(0,0) & \partial_z g(0,0) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 + \partial_x g(0,0) & \partial_z g(0,0) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Daher folgt:

$$dg(0,0) = (-1, 0)$$

(d) Mittels linearer Approximation sehen wir:

$$g(x,z) \simeq g(0,0) + dg(0,0)(x,z) = 1 - x$$

Wir untersuchen also die Näherung $f(x, 1-x, z) \approx 1$. Man kann folgende Tabelle mit Werten begutachten:

x	z	Einsetzen Näherung	Fehler zu gewünschtem Wert 1
0	0	1	0
1	0	0.785398163	0.214601837
0.5	0	1.131989256	0.131989256
0.25	0	1.058355416	0.058355416
0.1	0	1.012217418	0.012217418
0.01	0	1.000141235	0.000141235
0	1	1	0
1	1	2.134933556	1.134933556
0.5	1	1.928666517	0.928666517
0.25	1	1.479297801	0.479297801
0.1	1	1.183476252	0.183476252
0.01	1	1.01732348	0.01732348
0	0.5	1	0
1	0.5	1.294902658	0.294902658
0.5	0.5	1.432767322	0.432767322
0.25	0.5	1.217278286	0.217278286
0.1	0.5	1.076874593	0.076874593
0.01	0.5	1.006628231	0.006628231
0	0.25	1	0
1	0.25	1.008471204	0.008471204
0.5	0.25	1.263676961	0.263676961
0.25	0.25	1.127935583	0.127935583
0.1	0.25	1.040525848	0.040525848
0.01	0.25	1.002981394	0.002981394
0	0.1	1	0
1	0.1	0.867999209	0.132000791
0.5	0.1	1.180751501	0.180751501
0.25	0.1	1.084120047	0.084120047
0.1	0.1	1.022699661	0.022699661
0.01	0.1	1.001192909	0.001192909
0	0.01	1	0
1	0.01	0.793291546	0.206708454
0.5	0.01	1.136648992	0.136648992
0.25	0.01	1.060817492	0.060817492
0.1	0.01	1.013219104	0.013219104
0.01	0.01	1.000241733	0.000241733

12.3. Satz von Fubini

(a) Man berechne, unter Verwendung des Satzes von Fubini:

$$\begin{aligned}
\int_{[0,2\pi]\times[1,2]} y\sin(xy)d\mu &= \int_1^2 \int_0^{2\pi} y\sin(xy)dxdy \\
&= \int_1^2 -\cos(xy)\Big|_{x=0}^{x=2\pi} dy \\
&= \int_1^2 1-\cos(2\pi y)dy \\
&= 1 - \Big(\frac{1}{2\pi}\sin(2\pi y)\Big)\Big|_{y=1}^{y=2} \\
&= 1 - \frac{1}{2\pi}\left(\sin(4\pi)-\sin(2\pi)\right) = 1,
\end{aligned}$$

wobei wir natŕlich dank der Stetigkeit von $(x,y)\mapsto y\sin(xy)$ den Satz von Fubini anwenden dürfen.

(b) Man erkennt, dass $(x,y,z)\mapsto z^4\sin(x+y)$ als Komposition stetiger Funktionen stetig ist. Also können wir den Satz von Fubini anwenden und erkennen:

$$\begin{aligned}
\int_{[0,2\pi]\times[0,2\pi]\times[-1,1]} z^4\sin(x+y)d\mu &= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_{-1}^1 z^4\sin(x+y)dzdydx \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{5}z^5\sin(x+y)\Big|_{z=-1}^{z=1} dydx \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{2}{5}\sin(x+y)dydx \\
&= \int_0^{2\pi} -\frac{2}{5}\cos(x+y)\Big|_{y=0}^{2\pi} dx \\
&= \int_0^{2\pi} -\frac{2}{5}\left(\cos(x+2\pi)-\cos(x)\right)dx = 0
\end{aligned}$$

Dasselbe Ergebnis lässt sich auch sofort sehen, wenn zuerst über x oder y integriert wird.

(c) Wir können den Satz von Fubini auf die stetige Funktion xy^2z^3 anwenden und berechnen:

$$\begin{aligned}
\int_{[0,1]^3} xy^2z^3\,d\mu &= \int_0^1\int_0^1\int_0^1 xy^2z^3\,dxdydz \\
&= \int_0^1\int_0^1 \frac{1}{2}y^2z^3\,dydz \\
&= \int_0^1\int_0^1 \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}z^3\,dz \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{24}
\end{aligned}$$

(d) Man beachte, dass $(x,y) \mapsto \frac{x-y}{(x+y)^3}$ in $(0,0)$ unstetig (und sogar undefiniert) ist. Also ist der Satz von Fubini nicht anwendbar. Wir können trotzdem die iterierten Integrale betrachten und erkennen:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} dydx &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{2x}{(x+y)^3} - \frac{x+y}{(x+y)^3} dydx \\
&= \int_0^1 -\frac{x}{(x+y)^2} + \frac{1}{x+y}\Big|_{y=0}^{y=1} dx \\
&= \int_0^1 -\frac{x}{(x+1)^2} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} dx \\
&= \int_0^1 -\frac{x}{(x+1)^2} + \frac{x+1}{(x+1)^2} dx \\
&= \int_0^1 \frac{1}{(x+1)^2} dx \\
&= -\frac{1}{x+1}\Big|_{x=0}^{x=1} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2},
\end{aligned}$$

jedoch gilt gemäss einer analogen Berechnung:

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} dxdy = -\frac{1}{2},$$

denn:

$$f(x,y) := \frac{x-y}{(x+y)^3} = -\frac{y-x}{(y+x)^3} = -f(y,x)$$

Die beiden iterierten Integrale stimmen also nicht miteinander überein.

12.4. Anwendbarkeit des Satzes von Fubini

(a) Um das iterierte integral zu berechnen fixieren wir zuerst ein $x \in [0,1]$ und berechnen das Integral

$$\int_{-1}^1 f(x,y)\, dy,$$

wobei hier die Fälle $x \in \mathbb{Q}$ und $x \notin \mathbb{Q}$ unterschieden werden müssen. Falls $x \notin \mathbb{Q}$, gilt $f(x,y) = 0$ für alle $y \in [-1,1]$ und somit auch

$$\int_{-1}^1 f(x,y)\, dy = 0.$$

Falls $x \in \mathbb{Q}$, gilt $f(x,y) = y$. Die Integration über $[-,1,1]$ ergibt

$$\int_{-1}^1 f(x,y)\, dy = \int_{-1}^1 y\, dy = \frac{y^2}{2}\Big|_{y=-1}^{y=1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0.$$

Somit gilt für alle $x \in [0,1]$

$$\int_{-1}^{1} f(x,y)\,dy = 0,$$

und folglich ergibt auch das iterierte Integral

$$\int_0^1 \int_{-1}^{1} f(x,y)\,dy\,dx = 0.$$

(b) Sei $e : Q \to \mathbb{R}$ eine beliebige Treppenfunktion mit $e \leq f$. Wir können e schreiben als

$$e = \sum_{k=1}^{K} c_k \chi_{Q_k}$$

für irgend eine Zerlegung von Q in disjunkte Teilquader. Sei nun $(x,y) \in Q$ beliebig. Dann befindet sich (x,y) in einem der Teilquder dieser Zerlegung, sagen wir $(x,y) \in Q_k$, und somit $e(x,y) = c_k$.

Der Quader Q_k lässt sich schreiben als $Q_k = I_1 \times I_2$ für Intervalle $I_1, I_2 \subset \mathbb{R}$. Da jedes Intervall in $\mathbb{R}$ sowohl rationale wie auch irrationale Zahlen enthalten muss, existiert ein $x_0 \in I_1$ mit $x_0 \in \mathbb{Q}$. Somit gilt $(x_0, y) \in Q_k$ und $f(x_0,y) = 0$. Da $e \leq f$, muss auch gelten $c_k = e(x_0,y) \leq f(x_0,y) = 0$. Damit haben wir gezeigt, dass $e(x,y) \leq 0$.

Es gibt aber auch ein $x_1 \in I_1$ mit $x_1 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Wir haben also $(x_1,y) \in Q_k$ und $f(x_1,y) = y$. Da $e \leq f$, muss gelten $c_k = e(x_1,y) \leq f(x_1,y) = y$, und somit auch $e(x,y) \leq y$.

Zusammengefasst erhalten wir $e(x,y) \leq \min(0,y)$. Auf die selbe Weise können wir auch zeigen, dass $g(x,y) \geq \max(0,y)$ für alle Treppenfunktionen g mit $g \geq f$. Man bemerke, dass die Funktionen $\min(0,y)$ und $\max(0,y)$ stetig sind auf Q und somit Riemann-integrabel. Zudem können wir den Satz von Fubini auf diese Funktionen anwenden, und berechnen:

$$\int_{[0,1]\times[-1,1]} \min(0,y)\,d\mu = \int_{-1}^{1}\int_0^1 \min(0,y)\,dx\,dy = \int_{-1}^{1} \min(0,y)\,dy = \int_{-1}^{0} y\,dy = -\frac{1}{2}$$

$$\int_{[0,1]\times[-1,1]} \max(0,y)\,d\mu = \int_{-1}^{1}\int_0^1 \max(0,y)\,dx\,dy = \int_{-1}^{1} \max(0,y)\,dy = \int_{0}^{1} y\,dy = \frac{1}{2}$$

Aus Satz 8.1.3 im Skript folgt nun, dass für alle Treppenfunktionen $e \leq f$ gilt:

$$\int_{[0,1]\times[-1,1]} e\,d\mu \leq \int_{[0,1]\times[-1,1]} \min(0,y)\,d\mu = -\frac{1}{2},$$

und für alle Treppenfunktionen $g \geq f$ gilt

$$\int_{[0,1]\times[-1,1]} g\,d\mu \geq \int_{[0,1]\times[-1,1]} \min(0,y)\,d\mu = \frac{1}{2}.$$

Dies zeigt wiederum, dass für das untere bzw. das obere Riemann-Integral von f gilt:

$$\underline{\int}_{[0,1]\times[-1,1]} f\,d\mu \leq -\frac{1}{2}, \qquad \overline{\int}_{[0,1]\times[-1,1]} f\,d\mu \geq \frac{1}{2}.$$

Somit ist f nicht Riemann-integrabel.