13.1. Ein Kriterium für die Jordan-Messbarkeit

Zum Beweis der Messbarkeit von Ω genügt es offensichtlich, Treppenfunktionen $e \leq \chi_\Omega \leq g$ mit Werten 0 oder 1 zu betrachten, also $e = \chi_E$, $g = \chi_G$ für Elementarfguren $E \subset \Omega \subset G$. Weiter gilt in diesem Fall

$$\chi_{G \setminus E} = \chi_G - \chi_E$$

also

$$\mu(G \setminus E) = \mu(G) - \mu(E)$$

und (1) folgt. Die Identität (3) ergibt sich analog aus Definition 8.1.3 im Vorlesungsskript.

Schliesslich gilt $\mu(\partial\Omega) = 0$ genau dann, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Elementarfgur $U \subset \mathbb{R}^n$ existiert mit $\partial\Omega \subset U$ und $\mu(U) < \varepsilon$. Dann sind

$$E = \Omega \setminus U, \quad G = \Omega \cup U$$

Elementarfiguren mit $E \subset \Omega \subset G$, und $U = G \setminus E$, also

$$\mu(G \setminus E) = \mu(U) < \varepsilon,$$

und umgekehrt.

13.2. Jordan-Messbarkeit der Union und des Schnittes von Jordan-messbarer Mengen

Man beachte, dass für beliebige Elementarfiguren $E, G \subset Q$ die Union $E \cup G$ und der Schnitt $E \cap G$ auch Elementarfiguren sind. Daher sind $E \cup G$ und $E \cap G$ Jordan-messbar. Es gilt zusätzlich

$$\mu(E \cup G) + \mu(E \cap G) = \mu(E) + \mu(G). \tag{1}$$

Tatsächlich sind $\chi_{E\cup G}$, $\chi_{E\cap G}$, χ_E, χ_G R-integrabel und $\chi_{E\cup G} + \chi_{E\cap G} = \chi_E + \chi_G$. Daher folgt (1) wegen der Linearität des Riemann Integrals.

Mithilfe der Aufgabe 13.1 finden wir für jedes $\varepsilon > 0$ Elementarfiguren E_1, E_2, G_1, G_2 mit

$$E_1 \subset A \subset G_1,$$
$$E_2 \subset B \subset G_2$$

und

$$\mu(G_1 \setminus E_1) < \varepsilon,$$
$$\mu(G_2 \setminus E_2) < \varepsilon.$$

Wir definieren $E_3 := E_1 \cup E_2$, $G_3 = G_1 \cup G_2$. Dann sind E_3, G_3 Elementarfiguren mit $E_3 \subset A \cup B \subset G_3$ und

$$\begin{aligned}\mu(G_3 \setminus E_3) &= \mu(G_1 \cup G_2) - \mu(E_1 \cup E_2)\\ &= \mu(G_1) + \mu(G_2) - \mu(G_1 \cap G_2) - \mu(E_1) - \mu(E_2) + \mu(E_1 \cap E_2)\\ &\leq \Big(\mu(G_1) - \mu(E_1)\Big) + \Big(\mu(G_2) - \mu(E_2)\Big) < 2\varepsilon.\end{aligned}$$

Wir definieren $E_4 := E_1 \cap E_2$, $G_4 = G_1 \cap G_2$. Dann sind E_4, G_4 Elementarfiguren mit $E_4 \subset A \cap B \subset G_4$ und

$$\begin{aligned}\mu(G_4 \setminus E_4) &= \mu(G_1 \cap G_2) - \mu(E_1 \cap E_2)\\ &= \mu(G_1) + \mu(G_2) - \mu(G_1 \cup G_2) - \mu(E_1) - \mu(E_2) + \mu(E_1 \cup E_2)\\ &\leq \Big(\mu(G_1) - \mu(E_1)\Big) + \Big(\mu(G_2) - \mu(E_2)\Big) < 2\varepsilon.\end{aligned}$$

Die Jordan-Messbarkeit der Mengen $A \cup B$ und $A \cap B$ folgt mithilfe der Aufgabe 13.1. Die Identität

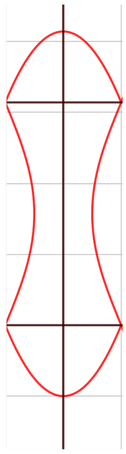
$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B).$$

folgt wie im Beweis von (1) für Elementafiguren.

13.3. Jordan-Bereiche

Die Figur ist eine Vereinigung von 4 Hypographen, bzw. deren Rotationen und Verschiebungen in $\mathbb{R}^2$, siehe die Skizze unten.

Die schwarzen Linien trennen die Hypographen. Also haben wir den Hypographen zu $x \mapsto 1 - x^2$ auf $x \in [-1, 1]$ einmal verschoben um π in positive y-Richtung (wir nennen diese Teilmenge S_1) und einmal um 180 Grad gedreht (wir nennen diese Teilmenge S_2). Ferner haben wir noch die Hypographen von $x \mapsto \frac{1}{2}\sin(x)$ gedreht um 90 Grad im Gegenuhrzeigersinn und um 1 in negative x-Richtung verschoben (S_3), sowie denjenigen von $x \mapsto \frac{1}{2}\sin(x) + 1$ um 90 Grad im Uhrzeigersinn gedreht (S_4), Nutzt man Bemerkung 8.3.2 ii), so sieht man leicht, dass diese disjunkte Vereinigung ebenfalls Jordan-messbar ist. Dies folgt, da jede der vier Hypographen (und natürlich auch die Rotationen mit analogen Argumenten) Jordan-messbar sind. Also lassen sich diese von innen und aussen durch Elementarfiguren approximieren. Dies sieht man so:



Sei $\varepsilon > 0$ und E_j, G_j für $j = 1, 2, 3, 4$ Elementarfiguren mit:

$$E_j \subset S_j \subset G_j, \quad \mu(G_j \setminus E_j) < \varepsilon,$$

wobei wir hier für die Inklusion die entsprechenden Rotationen wie für S_j auch zum Finden der Mengen E_j, G_j auf approximierende Elementarfiguren anwenden. Man beachte, dass so Quader auf Quader abgebildet werden und dass Rotationen und Translationen die Fläche nicht verändern. Wir schreiben nun also:

$$E := E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4,$$

sowie:

$$G := G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup G_4$$

Dann sind E, G auch Elementarfiguren (als endliche Vereinigung ebensolcher) und es gilt:

$$E \subset A \subset G$$

Ferner:

$$\mu(G \setminus E) \leq \sum_{j=1}^{4} \mu(G_j \setminus E) \leq \sum_{j=1}^{4} \mu(G_j \setminus E_j) < 4\varepsilon,$$

wobei wir für die erste Ungleichung die Additivität des Flächeninhaltes verwendet haben und in der zweiten Ungleichung die Tatsache $E_j \subset E$ benutzt haben. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt aus Bemerkung 8.3.2 ii), dass A Jordan-messbar ist.

13.4. Integration über Jordan-Bereiche

(a) Wir haben:

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_\psi} y^3 d\mu &= \int_{-1}^{1} \int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} y^3 dy dx \\
&= \int_{-1}^{1} \frac{1}{4} y^4 \Big|_{y=0}^{y=\sqrt{1-x^2}} dx \\
&= \int_{-1}^{1} \frac{1}{4}(1-x^2)^2 dx \\
&= \int_{-1}^{1} \frac{1}{4}(1-2x^2+x^4) dx \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} = \frac{4}{15}
\end{aligned}$$

(b) Es gilt:

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_\psi} e^{\cos(x)} d\mu &= \int_{0}^{\pi} \int_{0}^{\sin(x)} e^{\cos(x)} dy dx \\
&= \int_{0}^{\pi} \sin(x) e^{\cos(x)} dx \\
&= -e^{\cos(x)} \Big|_{x=0}^{x=\pi} = e - \frac{1}{e}
\end{aligned}$$

(c) Es gilt für beliebiges $r > 0$ ($r = 0$ ist trivial):

$$\begin{aligned}
\int_{B_r(0)} 1 d\mu &= \int_{-r}^{r} \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} dy dx \\
&= \int_{-r}^{r} 2\sqrt{r^2-x^2} dx \\
&= \int_{-1}^{1} 2r^2 \sqrt{1-z^2} dz,
\end{aligned}$$

wobei wir die Substitution $rz = x$ verwendet haben. Ersetzen wir nun wieder mittels der Substitutionsregel $z = \sin(\varphi)$, so sehen wir:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} \sqrt{1-z^2}dz &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(\varphi)\sqrt{1-\sin(\varphi)^2}d\varphi \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(\varphi)^2 d\varphi \\ &= \pi - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(\varphi)^2 d\varphi \\ &= \pi - \left(-\cos(\varphi)\sin(\varphi)\Big|_{\varphi=-\frac{\pi}{2}}^{\varphi=\frac{\pi}{2}} + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(\varphi)^2 d\varphi\right) \\ &= \pi - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(\varphi)^2 d\varphi,\end{aligned}$$

also:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(\varphi)^2 d\varphi = \frac{\pi}{2} = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-z^2}dz,$$

und somit:

$$\int_{B_r(0)} 1 d\mu = \int_{-1}^{1} 2r^2\sqrt{1-z^2}dz = \frac{\pi}{2}2r^2 = r^2\pi$$

Das ist die bekannte Formel für den Flächeninhalt eines Kreises.

(d) Man bemerke, dass wenn $x \in B_1(0)$, dann ist auch $-x \in B_1(0)$. Da aber auch $\sin(2\pi x)e^{y^4}\arctan(x^2y) = -\sin(2\pi(-x))e^{y^4}\arctan((-x)^2y)$, so liegt nahe, dass:

$$\int_{B_1(0)} \sin(2\pi x)e^{y^4}\arctan(x^2y)d\mu = 0$$

Genauer lässt sich dies wie folgt sehen:

$$\begin{aligned}
\int_{B_1(0)} \sin(2\pi x)e^{y^4}\arctan(x^2y)d\mu &= \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \sin(2\pi x)e^{y^4}\arctan(x^2y)dxdy \\
&= \int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-y^2}} \sin(2\pi x)e^{y^4}\arctan(x^2y)dxdy \\
&+ \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{0} \sin(2\pi x)e^{y^4}\arctan(x^2y)dxdy \\
&= \int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-y^2}} \sin(2\pi x)e^{y^4}\arctan(x^2y)dxdy \\
&+ \int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-y^2}} \sin(2\pi(-x))e^{y^4}\arctan((-x)^2y)dxdy \\
&= \int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-y^2}} \sin(2\pi x)e^{y^4}\arctan(x^2y)dxdy \\
&- \int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-y^2}} \sin(2\pi x)e^{y^4}\arctan(x^2y)dxdy \\
&= 0
\end{aligned}$$

13.5. Satz von Green

(a) Das Gebiet A ist ein C^1_{pw}-Gebiet, denn alle Punkte ausser $(-1,1)$ und $(1,1)$ sind offensichtlich entweder auf dem Graph der Funktion $x \mapsto 1$ oder $x \mapsto x^2$. Dadurch besitzen all diese Punkte eine Nachbarschaft wie in Definition 8.4.2, denn man kann $\psi(x) = x^2$ oder $\psi(x) = 1$ verwenden. Alternativ ist klar, dass A für diese Punkte einen Normalbereich der Klasse C^1 bezüglich y definiert.

Für die verbleibenden Punkte kann man per Symmetrie argumentieren, also reicht es, den Punkt $(1,1)$ anzuschauen.

(b) Wir parametrisieren die beiden Rand-Komponenten durch:

$$\gamma_1(t) := (-t, 1), \quad \gamma_2(t) := (t, t^2), \quad \forall t \in [-1, 1]$$

Man beachte, dass der Rand dadurch im Gegenuhrzeigersinn orientiert ist. Dann ist klar:

$$\int_{\partial A} \lambda = \int_{\gamma_1} \lambda + \int_{\gamma_2} \lambda$$

Wir berechnen also:

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_1} \lambda &= \int_{-1}^{1} \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -t^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} dt \\ &= \int_{-1}^{1} -e^{-t} dt \\ &= e^{-t}\Big|_{t=-1}^{t=1} = \frac{1}{e} - e\end{aligned}$$

Analog:

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_2} \lambda &= \int_{-1}^{1} \begin{pmatrix} t^4 e^t \\ t^5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix} dt \\ &= \int_{-1}^{1} t^4 e^t + 2t^6 dt \\ &= \left((t^4 - 4t^3 + 12t^2 - 24t + 24)e^t + \frac{2}{7} t^7 \right) \Big|_{t=-1}^{t=1} \\ &= \frac{4}{7} - \frac{65}{e} + 9e,\end{aligned}$$

wobei wir wiederholt partiell integriert haben. Zusammen finden wir also:

$$\int_{\partial A} \lambda = \int_{\gamma_1} \lambda + \int_{\gamma_2} \lambda = \frac{4}{7} - \frac{64}{e} + 8e$$

(c) Dank des Satzes von Green wissen wir:

$$\int_{\partial A} \lambda = \int_A \partial_x \left(x^3 y \right) - \partial_y \left(y^2 e^x \right) d\mu = \int_A 3x^2 y - 2y e^x d\mu$$

Daher also:

$$\begin{aligned}\int_A 3x^2 y - 2ye^x d\mu &= \int_{-1}^{1} \int_{x^2}^{1} 3x^2 y - 2ye^x dy dx \\ &= \int_{-1}^{1} \left(3x^2 - 2e^x \right) \int_{x^2}^{1} y dy dx \\ &= \int_{-1}^{1} \frac{1}{2} \left(3x^2 - 2e^x \right) (1 - x^4) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} 3x^2 - 3x^6 dx - \int_{-1}^{1} e^x - x^4 e^x dx \\ &= \frac{3}{2} \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{7} \right) + 8e - \frac{64}{e} \\ &= \frac{4}{7} - \frac{64}{e} + 8e\end{aligned}$$

Die Ergebnisse stimmen also, wie gemäss des Satzes von Green vorhergesagt, überein.