1. Inhomogene Differentialgleichung (Serie 3)

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichung für $y = y(t)$:

$$y'' - 4y' + 4y = \sin(2t) + 1.$$

Finden Sie zudem die Lösung zu den Anfangswerten $y(0) = 1, y'(0) = 0$.

Hinweis: Verwenden Sie den Ansatz:

$$y_{part}(t) = A \cdot \cos(2t) + B \cdot \sin(2t) + C,$$

für $A, B, C \in \mathbb{R}$, um eine spezielle Lösung zu bestimmen.

Lösung: Man bemerke, dass die allgemeine Lösung zu der DGL geschrieben werden kann als:

$$y(t) = y_{part}(t) + y_{hom}(t),$$

wobei y_{part} eine partikuläre Lösung und y_{hom} die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen DGL für y sind:

$$y''_{hom} - 4y'_{hom} + 4y_{hom} = 0.$$

Dies folgt aus Satz 5.7.1. Im Detail: Wir können die DGL umschreiben zu einer DGL erster Ordnung, nämlich:

$$\frac{dF}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} F + \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(2x) + 1 \end{pmatrix},$$

wobei:

$$F(t) := \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$$

Dieses System ist zu der DGL aus der Aufgabenstellung äquivalent. Dank Satz 5.7.1 hat die allgemeine Lösung F die Form:

$$F = F_{part} + F_{hom},$$

wobei F_{hom} die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen DGL:

$$\frac{dF_{hom}}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} F_{hom},$$

ist und F_{part} eine beliebige Lösung zu:

$$\frac{dF_{part}}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} F_{part} + \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(2x) + 1 \end{pmatrix}$$

ist. Die Idee ist, dass wenn sowohl F_1 als auch F_2 die inhomogene DGL lösen, dann löst $F_1 - F_2$ die zugehörige homogene DGL aufgrund der Linearität. Dies kann man alles zurückübersetzen zu:

$$y(t) = y_{part}(t) + y_{hom}(t).$$

Man könnte nun die Fundamentallösung nun explizit mittels Matrixexponential bestimmen, also

$$F_{hom}(t) := \exp\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} t\right) F_0,$$

wobei $F_0 \in \mathbb{R}^2$ freie Parameter sind. Wir gehen aber mit Satz 5.6.3. vor.

Für Satz 5.6.3. berechnen wir zuerst das charakterisitische Polynom der homogenen DGL,

$$y''_{hom} - 4y'_{hom} + 4y_{hom} = 0.$$

Das charakterisitische Polynom ist

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2.$$

Nun müssen wir die Nullstellen des charakterisitischen Polynoms finden, was in diesem Fall einfach ist. $p(\lambda)$ hat eine doppelte Nullstelle bei $\lambda = 2$. Satz 5.6.3. besagt nun, dass

$$e^{2t}, \quad te^{2t}$$

zwei linear unabhängige Lösungen der homogenen DGL sind. Da die DGL zweiter Ordnung ist, ist auch der Lösungsraum 2-dimensional, siehe Korollar 5.6.1. Die allgemeine Lösung der homogenen DGL ist also gegeben durch:

$$y_{hom}(t) = \mu_1 \cdot e^{2t} + \mu_2 \cdot te^{2t},$$

wobei μ_1, μ_2 freie Parameter sind.

Es bleibt, eine partikuläre Lösung zu bestimmen. Dazu verwenden wir den bereits genannten Ansatz aus dem Hinweis:

$$y_{part}(t) = A \cdot \cos(2t) + B \cdot \sin(2t) + C$$

Man berechnet:

$$\begin{aligned} y'_{part}(t) &= -2A \cdot \sin(2t) + 2B \cdot \cos(2t) \\ y''_{part}(t) &= -4A \cdot \cos(2t) - 4B \cdot \sin(2t) \end{aligned}$$

Setzt man dies in die DGL ein, so sehen wir:

$$\begin{aligned}1+\sin(2t) &= (-4A-8B+4A)\cdot\cos(2t)+(-4B+8A+4B)\cdot\sin(2t)+4C\\ &= -8B\cdot\cos(2t)+8A\cdot\sin(2t)+4C,\end{aligned}$$

also:

$$A=\frac{1}{8},\quad B=0,\quad C=\frac{1}{4}$$

Folglich:

$$y_{part}(t)=\frac{1}{8}\cdot\cos(2t)+\frac{1}{4}$$

Verwenden wir die Zerlegung von y in homogene und partikuläre Lösung so finden wir die allgemeine Lösung:

$$y(t)=y_{part}(t)+y_{hom}(t)=\frac{1}{8}\cdot\cos(2t)+\frac{1}{4}+\mu_1\cdot e^{2t}+\mu_2\cdot te^{2t},$$

mit $\mu_1,\mu_2\in\mathbb{R}$.

Wir lösen nun das Anfangswertsproblem:

$$\begin{aligned}1=y(0)&=\frac{1}{8}\cdot 1+\frac{1}{4}+\mu_1\\ 0=y'(0)&=-\frac{1}{4}\cdot 0+2\mu_1+\mu_2\end{aligned}$$

Daher findet man dank der ersten Gleichung:

$$\mu_1=\frac{5}{8}$$

Setzt man dies in die zweite Gleichung ein, so sieht man:

$$\mu_2=-\frac{10}{8}$$

Daher ist die Lösung des Anfangswertsproblems:

$$y(t)=\frac{1}{8}\cdot\cos(2t)+\frac{1}{4}+\frac{5}{8}\cdot e^{2t}-\frac{10}{8}\cdot te^{2t}$$

2. Häufungspunkte von Folgen in der Ebene (Serie 5)

Bestimmen Sie für die folgenden Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^2$ jeweils alle Häufungspunkte:

(a) $a_n := \left(\cos\left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right), \sin\left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right)\right)$ **(b)** $b_n := \left(\frac{1}{n}\cos\left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right), \frac{1}{n}\sin\left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right)\right)$

Können Sie Beispiele von Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^2$ für ein beliebiges gegebenes $k \in \mathbb{N}$ geben, sodass die Folge genau k Häufungspunkte besitzt?

Lösung: Wir erinnern uns, dass ein Punkt $x \in \mathbb{R}^2$ ein *Häufungspunkt* einer Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^2$ ist, dann und nur dann, wenn eine Teilfolge gegen x konvergiert. Äquivalent dazu liegen in jeder Umgebung von x unendlich viele Folgeglieder. Ein wichtiger Satz in diese Richtung ist in Satz 4.3.6 gegeben und besagt, dass jede Folge in einer kompakten Menge (oder jede beschränkte Folge in $\mathbb{R}^2$) einen Häufungspunkt besitzt in der kompakten Menge bzw. $\mathbb{R}^2$.

Wir bemerken, dass die gegebenen Folgen beschränkt sind. Dies folgt, denn:

$$\|a_n\| = 1, \|b_n\| = \frac{1}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Wir bemerken, dass daher automatisch gilt:

$$\|b_n\| \to 0, \text{wenn } n \to \infty,$$

und damit auch:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = (0,0)$$

Man bemerke, dass wenn eine Folge konvergiert, so konvergiert auch jede Teilfolge gegen denselben Grenzwert. Also ist der einzige Häufungspunkt von (b_n) gerade $(0,0)$.

Wir wissen auch, dass (a_n) mindestens einen Häufungspunkt besitzt. Zudem sehen wir durch direktes Berechnen:

$$a_n = \begin{cases} (1,0), & \text{wenn } n = 4k \text{ für ein } k \in \mathbb{N}_0 \\ (0,1), & \text{wenn } n = 4k+1 \text{ für ein } k \in \mathbb{N}_0 \\ (-1,0), & \text{wenn } n = 4k+2 \text{ für ein } k \in \mathbb{N}_0 \\ (0,-1), & \text{wenn } n = 4k+3 \text{ für ein } k \in \mathbb{N}_0 \end{cases}$$

Also sehen wir, dass die Teilfolgen $(a_{4k})_{k\in\mathbb{N}}, (a_{4k+1})_{k\in\mathbb{N}}, (a_{4k+2})_{k\in\mathbb{N}}$ und $(a_{4k+3})_{k\in\mathbb{N}}$ jeweils konstant sind und somit sind die Punkte:

$$(1,0), (0,1), (-1,0), (0,-1),$$

sicher Häufungspunkte der Folge (a_n). Sei nun a ein beliebiger Häufungspunkt von (a_n). Dann sei (a_{n_k}) eine Teilfolge, welche gegen a konvergiert. Man bemerke, dass es unendlich viele n_k geben muss, welche denselben Rest bei Division mit Rest durch 4 besitzen. Dies ist klar, da nur 4 Reste möglich sind, eine Teilfolge aber unendlich viele Folgenglieder besitzt. Somit hat die Teilfolge abermals eine konstante Teilfolge (die Teilfolge ist konstant und entspricht einem der vier gefundenen Häufungswerte). Da aber jede Teilfolge einer konvergenten Folge auch konvergiert (und zwar gegen den Grenzwert der Folge selbst), muss also gelten:

$$a = (1, 0), (0, 1), (-1, 0) \text{ oder } (0, -1)$$

Daher sind diese 4 Punkte die einzigen Häufungspunkte der Folge.

Man beachte, dass man sehr leicht Folgen definieren kann, die genau k Häufungspunkte besitzen in Analogie zu (a_n):

$$c_n := \left(\cos\left(n \cdot \frac{2\pi}{k}\right), \sin\left(n \cdot \frac{2\pi}{k}\right)\right), \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Der Beweis ist komplett analog zu demjenigen für die Folge (a_n).

3. Fixpunkte (Serie 6)

Es sei $f : K \to K$ eine stetige Funktion und $K \subset \mathbb{R}^d$ eine kompakte Teilmenge. Wir sagen, dass $x_0 \in K$ ein Fixpunkt von f ist, falls:

$$f(x_0) = x_0$$

(a) Beweisen Sie, dass die Funktion:

$$g : K \to \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad g(x) := \|f(x) - x\|,$$

für $\|\cdot\|$ eine beliebige Norm, eine stetige Funktion ist.

(b) Folgern Sie, dass wenn f Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante $C < 1$ bezüglich $\|\cdot\|$ ist, dann existiert ein $x_0 \in K$ mit:

$$g(x_0) = 0$$

Folgern Sie, dass x_0 ein Fixpunkt ist.

Hinweis: Beweisen Sie zuerst, dass $g(f(x)) \leq g(x)$ für alle $x \in K$.

(c) Ist die Aussage korrekt, wenn wir nur annehmen, dass f stetig bzw. wenn die Lipschitz-Konstante $C \geq 1$ ist? Finden Sie ein Gegenbeispiel für $K \subset \mathbb{R}^2$.

Hinweis: Betrachten Sie $K := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 1 \leq \|(x, y)\|_2 \leq 2\right\}$. Wie können Sie K stetig in sich selbst abbilden ohne Fixpunkt? Ist die resultierende Abbildung Lipschitz?

Lösung: Wir bemerken, dass Summen stetiger Funktionen stetig sind. Also ist $x \mapsto f(x) - x$ sicher eine stetige Funktion. Die Norm ist gemäss Beispiel 4.1.4.i) und der äquivalenz von Normen stetig und somit ist g als Komposition stetiger Funktionen auch stetig. Dies beantwortet (a). Dies ist eine allgemeine Technik: Reduziere den Beweis der Stetigkeit/Differenzierbarkeit auf Verkettungen, Summen, Differenzen und gegebenenfalls Produkten/Quotienten solcher Funktionen.

Wir befolgen den Hinweis. Man bemerke, dass für beliebige $x \in K$ gilt gemäss Definition:

$$g(f(x)) = \|f(f(x)) - f(x)\|,$$

dank der C-Lipschitz-Stetigkeit von f gilt also (wir wenden direkt die Definition an):

$$\|f(f(x)) - f(x)\| \leq C\|f(x) - x\| = g(x),$$

also haben wir gesehen:

$$g(f(x)) \leq Cg(x), \quad \forall x \in K$$

Wir erinnern uns, dass eine Menge $K \subset \mathbb{R}^d$ kompakt ist, dann und nur dann, wenn K abgeschlossen (also die Grenzwerte in $\mathbb{R}^d$ konvergenter Folgen mit Folgegliedern in K auch in K liegen, siehe Satz 4.3.5) und beschränkt ist. Dies ist der Inhalt von Satz 4.3.6. Der Satz 4.2.3 besagt, dass das Bild einer kompakten Menge unter stetigen Funktionen auch kompakt ist. Insbesondere ist also $g(K)$ eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}_{\geq 0}$. Insbesondere nimmt g also sein Maximum und Minimum auf K an. Es sei $m \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ das Minimum von g auf K und wir nehmen an, dass $g(x_0) = m$ für $x_0 \in K$. Wir müssen beweisen, dass $m = 0$ gilt. Andernfalls wäre $m > 0$ und:

$$g(f(x_0)) \leq C \cdot g(x_0) = C \cdot m < m,$$

und da $f(x_0) \in K$ folgt:

$$\min_{x \in K} g(x) \leq g(f(x_0)) < m = \min_{x \in K} g(x)$$

Dies ist aber ein Widerspruch zur Wahl von m. Folglich also:

$$m = 0 \Rightarrow g(x_0) = 0$$

Benutzen wir die Definition von g, so ist klar:

$$0 = g(x_0) = \|f(x_0) - x_0\| \Rightarrow f(x_0) = x_0,$$

denn Normen sind positiv definit. Daher ist x_0 ein Fixpunkt. Dies beweist (b).

Im allgemeinen Fall ist die Aussage für $C \geq 1$ nicht korrekt. Man betrachte $K = \overline{B_2(0)} \setminus B_1(0)$. Diese Menge ist abgeschlossen, denn $\overline{B_2(0)}$ ist als Abschluss offensichtlich abgeschlossen und $\mathbb{R}^2 \setminus B_1(0)$ ist gemäss Definition 4.3.2 abgeschlossen, denn das Komplement ist $B_1(0)$ und somit offen. Daher ist K als Durchschnitt abgeschlossener Mengen auch abgeschlossen, siehe Satz 4.3.2. Die Menge K ist zudem beschränkt, denn $\overline{B_2(0)}$ ist beschränkt. Folglich, nach Satz 4.3.6 ist K kompakt. Wir betrachten nun die Funktion:

$$f : K \to K, \quad f(x,y) := (-y, x)$$

Es gilt:

$$\|f(x,y) - f(x',y')\| = \|(-y+y', x-x')\| = \sqrt{(y-y')^2 + (x-x')^2} = \|(x,y) - (x',y')\|,$$

also ist f 1-Lipschitz stetig. Man beachte, dass f die Rotation um 90 Grad ist. Daher ist intuitiv klar, dass f keinen Fixpunkt auf K besitzt. Man kann auch per Widerspruch argumentieren, nämlich wenn $(x,y) \in K$ ein Fixpunkt ist, so würde gelten:

$$(x,y) = f(x,y) = (-y, x),$$

also:

$$x = -y, \quad y = x \Rightarrow y = -y = x \Rightarrow x = y = 0,$$

und da $(0,0) \notin K$ besitzt f keinen Fixpunkt auf K. Also ist (c) gelöst.

4. Taylor-Entwicklung (Serie 4, FS 2020)

Man berechne das Taylorpolynom dritten Grades der folgenden Funktion um den angegebenen Punkt:

$$f(x,y) = e^{x/y} \text{ um } P = (1,1)$$

Lösung: Wir bemerken, dass das Taylorpolynom wie in Satz 7.5.2 gegeben ist. Also müssen wir partielle Ableitungen bis und mit 3.Ordnung berechnen. Wir bemerken zuerst, dass $e^{x/y}$ eine glatte Funktion in einer Umgebung von $(x,y) = (1,1)$ ist. Dies ist klar dank der Kettenregel, denn wir haben hier eine Verknüpfung glatter Funktionen (Polynome, Exponentialfunktion) und Quotienten glatter Funktionen.

Wir berechnen die folgenden partiellen Ableitungen:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) &= e^{x/y} \cdot \frac{1}{y} \\
\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) &= -e^{x/y} \cdot \frac{x}{y^2} \\
\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,y) &= e^{x/y} \cdot \frac{1}{y^2} \\
\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x,y) &= -e^{x/y} \cdot \frac{x}{y^3} - e^{x/y} \cdot \frac{1}{y^2} \\
\frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x,y) &= e^{x/y} \cdot \frac{x^2}{y^4} + e^{x/y} \cdot \frac{2x}{y^3} \\
\frac{\partial^3}{\partial x^3} f(x,y) &= e^{x/y} \cdot \frac{1}{y^3} \\
\frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} f(x,y) &= -e^{x/y} \frac{x}{y^4} - e^{x/y} \cdot \frac{2}{y^3} \\
\frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} f(x,y) &= e^{x/y} \cdot \frac{x^2}{y^5} + e^{x/y} \cdot \frac{4x}{y^4} + e^{x/y} \cdot \frac{2}{y^3} \\
\frac{\partial^3}{\partial y^3} f(x,y) &= -e^{x/y} \cdot \frac{x^3}{y^6} - e^{x/y} \cdot \frac{6x^2}{y^5} - e^{x/y} \cdot \frac{6x}{y^4}
\end{aligned}
$$

Dank Satz 7.5.1, auch angewandt auf die partiellen Ableitungen von f, können wir aus den berechneten Ableitungen alle fehlenden bestimmen. Einsetzen des Punktes

$P = (1,1)$ zeigt:

$$\begin{aligned}
f(1,1) &= e \\
\frac{\partial}{\partial x} f(1,1) &= e \\
\frac{\partial}{\partial y} f(1,1) &= -e \\
\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(1,1) &= e \\
\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(1,1) &= -2e \\
\frac{\partial^2}{\partial y^2} f(1,1) &= 3e \\
\frac{\partial^3}{\partial x^3} f(1,1) &= e \\
\frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} f(1,1) &= -3e \\
\frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} f(1,1) &= 7e \\
\frac{\partial^3}{\partial y^3} f(1,1) &= -13e
\end{aligned}$$

Daher finden wir, mittels der Formel für das Taylorpolynom:

$$\begin{aligned}
T_3 f((x,y);(1,1)) = e &+ e(x-1) - e(y-1) + \frac{1}{2}e(x-1)^2 - 2e(x-1)(y-1) + \frac{3}{2}e(y-1)^2 \\
&+ \frac{1}{6}e(x-1)^3 - \frac{3}{2}e(x-1)^2(y-1) + \frac{7}{2}e(x-1)(y-1)^2 - \frac{13}{6}e(y-1)^3
\end{aligned}$$

5. Optimierungsproblem mit Nebenbedingungen (Serie 6, FS 2020)

Ziel dieser Aufgabe ist es, die globalen Extrema der Funktion

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + 7x - 2y$$

auf dem Bereich $D = \{(x,y) \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ 3x + y \leq 3\}$ zu bestimmen.

(a) Argumentieren Sie, warum f sein globales Maximum und Minimum auf D annimmt.

(b) Bestimmen Sie die kritischen Punkte von f im Inneren von D.

(c) Bestimmen Sie die Kandidaten für Extrema der Einschränkung von f auf ∂D.

Hinweis: Kandidaten für Extrema sind kritische Punkte der Einschränkung von f auf ∂D gemäss Lagrange-Multiplikatoren sowie Punkte, in denen sich die Methode der Lagrange-Multiplikatoren nicht anwenden lässt.

(d) Bestimmen Sie das globale Maximum und Minimum von f auf D.

(e) Es sei m das Minimum von f auf D und M das Maximum von f auf D. Nimmt f auch den Wert $\frac{M+m}{2}$ an einer Stelle in D an? Warum?

Lösung: Man bemerke, dass f ein Polynom ist, also eine stetige Funktion gemäss den Beispielen aus der Vorlesung. Ferner sehen wir, dass D eine abgeschlossene und beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ ist. Abgeschlossenheit kann man leicht per konvergenten Folgen sehen, siehe Satz 4.3.5: Es sei (x_n, y_n) eine beliebige Folge in D, welche gegen einen Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ konvergiert. Dann gilt insbesondere:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = y$$

Man bemerke, dass dann auch gilt:

$$\lim_{n\to\infty} 3x_n + y_n = 3x + y$$

Da nun gilt:

$$x_n \geq 0, \quad y_n \geq 0, \quad 3x_n + y_n \leq 3, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

wegen $(x_n, y_n) \in D$, folgt auch:

$$x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad 3x + y \leq 3$$

Dies folgt aus den Eigenschaften von Grenzwerten aus Analysis 1, siehe Skript. Dadurch gilt aber auch:

$$(x, y) \in D$$

Gemäss Satz 4.3.5 ist D also abgeschlossen. Alternativ kann man auch sehen, dass $g_1(x, y) := x$, $g_2(x, y) := y$, $g_3(x, y) := 3x + y$ alles stetige Funktionen auf $\mathbb{R}^2$ sind als Polynome und daher gemäss Satz 4.5.2 (Urbilder abgeschlossener Mengen unter stetigen Funktionen sind relativ abgeschlossen) und Satz 4.3.2 (Durchschnitt abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen) nun:

$$g_1^{-1}([0, +\infty[) \cap g_2^{-1}([0, +\infty[) \cap g_3^{-1}(]-\infty, 3]),$$

eine abgeschlossene Teilmenge ist. Man erkennt aber leicht, dass:

$$D = g_1^{-1}([0, +\infty[) \cap g_2^{-1}([0, +\infty[) \cap g_3^{-1}(]-\infty, 3])$$

Zudem ist D beschränkt, denn $x, y \geq 0$ für alle $(x, y) \in D$. Also brauchen wir nur noch obere Schranken zu finden. Es gilt aber:

$$3x \leq 3x + y \leq 3 \Rightarrow x \leq 1,$$

sowie:

$$y \leq 3x + y \leq 3 \Rightarrow y \leq 3,$$

also auch:

$$\|(x, y)\| \leq \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10} < +\infty,$$

also ist D beschränkt. Satz 4.3.6 garantiert nun, dass D kompakt ist.

Da f also eine stetige Funktion auf einer kompakten Teilmenge ist, erreicht f gemäss Satz 4.2.3 sein globales Maximum und Minimum auf D. Damit ist (a) bewiesen.

Die kritischen Punkte im Inneren von D sind durch die folgende Bedingung bestimmt:

$$df(x, y) = (0, 0),$$

also:

$$\partial_x f(x, y) = 2x + 7 = 0, \quad \partial_y f(x, y) = 2y - 2 = 0,$$

also:

$$x = -\frac{7}{2}, \quad y = 1$$

Wir bemerken, dass der Punkt $(-7/2, 1) \notin D$, denn die x-Koordinate ist negativ. Somit besitzt f keine kritischen Punkte im Inneren von D. Dies beantwortet (b).

Für die Kandidaten auf ∂D, bemerken wir zuerst, dass ∂D aus drei Segmenten besteht:

$$\begin{aligned}
A_1 &:= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0, 0 \leq y \leq 3\} \\
A_2 &:= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0, 0 \leq x \leq 1\} \\
A_3 &:= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x + y = 3, 0 \leq x \leq 1\}
\end{aligned}$$

Um die "kritischen Punkte" auf ∂D zu finden, verwenden wir direkte Argumente und/oder Lagrange-Multiplikatoren auf jedem Segment A_j, $j = 1, 2, 3$. Wir bemerken, dass die Eckpunkte:

$$(1, 0), (0, 3), (0, 0),$$

auch kritisch sind, denn für diese können wir nichts mittels Lagrange-Multiplikatoren aussagen. Wir betrachten A_1, also den Fall $x = 0$. Dann:

$$f(0, y) = y^2 - 2y$$

Für diese Funktion können wir die kritischen Punkte bestimmen:

$$\partial_y f(0,y) = 2y - 2 = 0 \Rightarrow y = 1,$$

also ist $(x,y) = (0,1)$ der einzige kritische Punkt für die Funktion auf A_1. Analog für A_2 haben wir die Funktion:

$$f(x,0) = x^2 + 7x,$$

und durch ableiten bestimmen wir die kritischen Punkte:

$$\partial_x f(x,0) = 2x + 7 = 0 \Rightarrow x = -\frac{7}{2},$$

aber $(-7/2, 0) \notin A_2 \subset \partial D$, also keine zusätzlichen Kandidaten. Die Menge A_3 kann nun per Lagrange-Multiplikatoren behandelt werden mit der Nebenbedingung $g(x,y) = 3x + y - 3 = 0$. Satz 7.9.1 besagt nun, dass ein lokales Extremum unter der Nebenbedingung $g(x,y) = 0$ folgende Gleichung erfüllt:

$$df(x,y) + \lambda dg(x,y) = (2x + 7 + 3\lambda, 2y - 2 + \lambda) = (0,0),$$

für geeignetes $\lambda \in \mathbb{R}$. Daher gilt:

$$x = \frac{-3\lambda - 7}{2}, \quad y = \frac{-\lambda + 2}{2},$$

und setzt man diese Koordinaten in $g(x,y) = 0$ ein, so sehen wir:

$$0 = g\left(\frac{-3\lambda - 7}{2}, \frac{-\lambda + 2}{2}\right) = -5\lambda - \frac{25}{2},$$

und damit:

$$\lambda = -\frac{5}{2}$$

Setzt man dies ein, so ist:

$$x = \frac{1}{4}, \quad y = \frac{9}{4},$$

und dieser kritische Punkt ist nun in ∂D. Wie schon erwähnt sind auch die Eckpunkte des Dreiecks ∂D Kandidaten für Extrema. Dies beendet (c). (Man beachte, dass man auch ohne Lagrange-Multiplikatoren, dafür mit einer Parametrisierung des Geradenabschnitts argumentieren könnte)

Um die globalen Extrema von f auf D zu bestimmen, muss man die kritischen Punkte im Inneren von D und auf dem Rand betrachten. Wir haben nun in (b) und (c) genau die folgenden kritischen Punkte gefunden:

$$(1,0), (0,3), (0,0), (0,1) \text{ und } (1/4, 9/4)$$

Setzen wir ein, so sehen wir:

$$f(1,0) = 8, \quad f(0,3) = 3, \quad f(0,0) = 0, \quad f(0,1) = -1, \quad f(1/4, 9/4) = \frac{19}{8}$$

Da die globalen Extrema in kritischen Stellen liegen müssen und gemäss (a) existieren, muss also 8 das globale Maximum sein und in $(1,0)$ angenommen werden und -1 das globale Minimum sein und in $(0,1)$ angenommen werden. Dies beendet (d).

Ja, der Grund dafür, dass $(M+m)/2$ angenommen wird, liegt im Zwischenwertsatz. Es sei nämlich $\gamma : [0,1] \to D$ ein stetiger Pfad zwischen der Stelle, an der das globale Minimum angenommen wird, also $f(\gamma(0)) = m$, und der Stelle, an der das globale Maximum angenommen wird, also $f(\gamma(1)) = M$. Ein solcher Pfad existiert trivialerweise, denn wir können zwei Punkte in D durch eine Strecke in D verbinden (D ist ein zusammenhängendes Gebiet). Die Funktion $\tilde{f} := f \circ \gamma : [0,1] \to \mathbb{R}$ ist als Komposition stetiger Funktionen stetig und gemäss des Zwischenwertsatzes wird also jeder Wert zwischen $\tilde{f}(0) = m$ und $\tilde{f}(1) = M$ an einer Stelle $t \in [0,1]$ angenommen. Folglich insbesondere der Wert $(M+m)/2$ an einer Stelle t und damit:

$$\frac{M+m}{2} = \tilde{f}(t) = f(\gamma(t)),$$

und da $\gamma(t) \in D$ folgt, dass der Wert von f angenommen wird. Dies klärt (e).

6. Mehrfachintegral II (Serie 7, FS 2020)

(a) Wir betrachten die Menge

$$E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x, y > 0, x < y < 2x, x^2 y < 1\right\}.$$

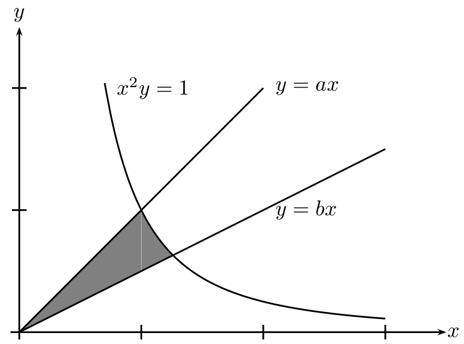
Schreiben Sie E als x-einfachen Bereich, d.h. als Menge der Form:

$$E := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a < x < b, \varphi(x) < y < \psi(x)\},$$

für Funktionen $\varphi, \psi :]a,b[\to \mathbb{R}$ und $a, b \in \mathbb{R}$.

(b) Berechnen Sie das Integral $\int_E xy \, d\mu$ für E wie in Teilaufgabe a).

Lösung: Wir machen eine Skizze von E:



Bemerkung: Im Bild sollte $y = 2x$ statt $y = ax$ und $y = x$ statt $y = bx$ stehen. Die Parameter a, b im Bild sind nicht diejenigen, welche in der Aufgabe gesucht werden!

Wir bestimmen a und b in $a < x < b$. Es ist offensichtlich $a = 0$. Dank der Skizze sehen wir, dass wir den Schnittpunkt zwischen $y = x$ und $x^2y = 1$ finden müssen, um b zu bestimmen. Daher finden wir:

$$\frac{1}{x^2} = y = x \Rightarrow x^3 = 1 \Rightarrow x = 1,$$

und somit:

$$b = 1$$

Ebenfalls ist aus der Skizze klar, dass:

$$\varphi(x) := x$$

Zudem sehen wir auch:

$$\psi(x) := \min\left\{2x, \frac{1}{x^2}\right\}$$

Mit diesen Funktionen lässt sich E wie in der Aufgabenstellung beschreiben.

Wir können auch wie folgt argumentieren: wenn $(x, y) \in E$, dann gilt

$$x, y > 0, \quad x < y < 2x, \quad y < \frac{1}{x^2}.$$

Aus der zweiten und dritten Ungleichung folgt:

$$x < \frac{1}{x^2},$$

also

$$x^3 < 1.$$

Da $x > 0$ impliziert dies wiederum

$$x < 1.$$

Für y haben wir einerseits die Bedingung $y > x$. Andererseits gelten die beiden Bedinungen

$$y < 2x, \quad y < \frac{1}{x^2},$$

also

$$y < \min\left\{2x, \frac{1}{x^2}\right\}.$$

Zusammengefasst haben wir also:

$$(x, y) \in E \quad \Leftrightarrow \quad 0 < x < 1, \quad x < y < \min\left\{2x, \frac{1}{x^2}\right\}.$$

Wir verwenden Beispiel 8.3.3 um das Integral zu lösen. Wir beachten, dass die untere Schranke durch φ schlicht zu einer unteren Integrationsgrenze führt, der Beweis der Jordan-Messbarkeit und die Formel für das Integral über bleibt sonst gleich wie im Skript von Michael Struwe für den Fall nur einer Schranke (i.e. $\varphi(x) = 0$). Daher können wir schreiben:

$$\int_E xy d\mu = \int_0^1 \int_x^{\min\{2x, \frac{1}{x^2}\}} xy\, dydx$$

Als nächstes wollen wir das Minimum loswerden. Dazu bestimmen wir die Bereiche, in denen die beiden Funktionen jeweils entscheidend werden, d.h. die Bereiche, in denen $2x \leq 1/x^2$ gilt und umgekehrt. Wir sehen, dass:

$$2x \leq \frac{1}{x^2} \Rightarrow x \leq \frac{1}{\sqrt[3]{2}},$$

also können wir dies umschreiben zu:

$$\int_0^1 \int_x^{\min\{2x, \frac{1}{x^2}\}} xy\, dydx = \int_0^{\frac{1}{\sqrt[3]{2}}} \int_x^{2x} xy\, dydx + \int_{\frac{1}{\sqrt[3]{2}}}^1 \int_x^{\frac{1}{x^2}} xy\, dydx$$

Wir berechnen das Integral der beiden Summanden jeweils individuell: Es gilt für den ersten Summanden:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{1}{\sqrt[3]{2}}} \int_x^{2x} xy\, dydx &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt[3]{2}}} x \cdot \frac{1}{2} y^2 \Big|_{y=x}^{y=2x} dx \\
&= \frac{3}{2} \int_0^{\frac{1}{\sqrt[3]{2}}} x^3 dx \\
&= \frac{3}{8} x^4 \Big|_{x=0}^{x=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}} \\
&= \frac{3}{16\sqrt[3]{2}}
\end{aligned}$$

Analog behandelt man den zweiten Summanden:

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{1}{\sqrt[3]{2}}}^{1}\int_{x}^{\frac{1}{x^2}} xy\,dydx &= \int_{\frac{1}{\sqrt[3]{2}}}^{1} x\cdot\frac{1}{2}y^2\Big|_{y=x}^{y=\frac{1}{x^2}}dx\\
&= \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{\sqrt[3]{2}}}^{1}\frac{1}{x^3}-x^3dx\\
&= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\frac{1}{x^2}-\frac{1}{4}x^4\right)\Big|_{x=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}}^{1}\\
&= -\frac{1}{4}+\frac{\sqrt[3]{4}}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16\sqrt[3]{2}}\\
&= -\frac{3}{8}+\frac{9}{16\sqrt[3]{2}}
\end{aligned}$$

Addieren ergibt daher:

$$\int_E xyd\mu = \frac{3}{16\sqrt[3]{2}}-\frac{3}{8}+\frac{9}{16\sqrt[3]{2}} = \frac{3}{8}\left(\sqrt[3]{4}-1\right)$$

Dies beendet (b).

7. Invertierbarkeit und Implizite Funktionen (Prüfung 2021)

Man betrachte:

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,\quad f(x_1,x_2):=\begin{pmatrix} x_2^2+\sin(x_1x_2)\\ \frac{x_1^2}{2}-x_1x_2+\frac{x_2^2}{2}+x_2\end{pmatrix},$$

sowie:

$$\phi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\quad \phi(y_1,y_2):=e^{y_2}-e^{-y_2}-2.$$

Zudem sei:

$$h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\quad h(x_1,x_2)=\phi(f(x_1,x_2))$$

(a) Ist f ein lokaler Diffeomorphismus von einer Umgebung von $(0,0)$ auf eine Umgebung von $f(0,0)$? Berechnen Sie gegebenenfalls $df^{-1}(f(0,0))$ der lokalen Inversen.

(b) Ist f ein lokaler Diffeomorphismus von einer Umgebung von $(1,0)$ auf eine Umgebung von $f(1,0)$? Berechnen Sie gegebenenfalls $df^{-1}(f(1,0))$ der lokalen Inversen.

(c) Berechnen Sie $d\phi(y_1,y_2)$ sowie $dh(x_1,x_2)$ für alle $(x_1,x_2),(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2$.

(d) Finden Sie alle $r \in \mathbb{R}$, sodass $h^{-1}(\{r\})$ um jeden Punkt $(x_{10}, x_{20}) \in h^{-1}(\{r\})$ lokal der Graph einer C^1-Funktion ist.

Hinweis: Man muss also die Existenz einer C^1-Funktion g definiert in einer Umgebung von x_{10} **oder** x_{20} beweisen, sodass $h^{-1}(\{r\})$ durch $(x_1, g(x_1))$ bzw. $(g(x_2), x_2)$ parametrisiert wird in einer Nachbarschaft von (x_{10}, x_{20}).

Lösung: Wir bemerken, dass dank der Kettenregel alle Funktionen glatt sind als Komposition glatter Funktionen, also können wir Differentiale über partielle Ableitungen bestimmen. Für die erste Teilaufgabe bemerken wir, dass wir den Umkehrsatz (Satz 7.7.1) anwenden wollen. Daher reicht es zu zeigen, dass $df(0,0)$ invertierbar ist um zu schliessen, dass f ein lokaler Diffeomorphismus in einer Umgebung von $(0,0)$ ist. Man findet:

$$df(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_2 \cos(x_1 x_2) & 2x_2 + x_1 \cos(x_1 x_2) \\ x_1 - x_2 & -x_1 + x_2 + 1 \end{pmatrix}$$

Setzen wir $(x, y) = (0, 0)$, dann sehen wir:

$$df(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

und wir sehen, dass $df(0,0)$ nicht invertierbar ist. Also ist f kein lokaler Diffeomorphismus in einer Umgebung von $(0,0)$.

Für (b) müssen wir dieselben Überlegungen für $(x, y) = (1, 0)$ vornehmen und wir sehen:

$$df(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

und die Determinante ist $\det df(1,0) = -1 \neq 0$, also können wir Satz 7.7.1 anwenden und f ist ein lokaler Diffeomorphismus in einer Umgebung von $(1,0)$. Zudem wissen wir:

$$df^{-1}(f(1,0)) = (df(1,0))^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

auch dank Satz 7.7.1. (Dies kann man direkt sehen mit $f^{-1} \circ f = Id$ und der Kettenregel.)

Wir können das direkt mittels der partiellen Ableitungen erledigen:

$$d\phi(y_1, y_2) = \begin{pmatrix} 0 & e^{y_2} + e^{-y_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2\cosh(y_2) \end{pmatrix},$$

sowie dank der Kettenregel 1.Version:

$$\begin{aligned} dh(x_1,x_2) &= d\phi(f(x_1,x_2))df(x_1,x_2) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 2\cosh(\frac{x_1^2}{2} - x_1x_2 + \frac{x_2^2}{2} + x_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2\cos(x_1x_2) & 2x_2 + x_1\cos(x_1x_2) \\ x_1 - x_2 & -x_1 + x_2 + 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Folglich:

$$\partial_{x_1} h(x_1,x_2) = 2(x_1 - x_2)\cosh(\frac{x_1^2}{2} - x_1x_2 + \frac{x_2^2}{2} + x_2),$$

und:

$$\partial_{x_2} h(x_1,x_2) = 2(-x_1 + x_2 + 1)\cosh(\frac{x_1^2}{2} - x_1x_2 + \frac{x_2^2}{2} + x_2),$$

Dies beende (c).

Hier wollen wir den Satz über implizite Funktionen (Satz 7.8.1) anwenden, da dies genau die lokale Darstellung als C^1-Graph garantiert. Hierzu müssen wir (da wir bezüglich x_1 oder x_2 eine Darstellung als Graph in Betracht ziehen) nur prüfen, ob gilt:

$$\partial_{x_1} h(x_{10}, x_{20}) \neq 0 \text{ oder } \partial_{x_2} h(x_{10}, x_{20}) \neq 0$$

Man bemerke, dass $\cosh(t) = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t})$ strikt positiv ist. Damit beide partiellen Ableitungen verschwinden, muss also gelten:

$$0 = x_1 - x_2,$$

sowie:

$$0 = -x_1 + x_2 + 1,$$

aber dann:

$$x_1 = x_2, \quad x_1 = x_2 + 1 \Rightarrow x_2 = x_2 + 1,$$

was ein Widerspruch ergibt. Also ist für alle r im Bild von h und jedes (x_{10}, x_{20}) mit $h(x_{10}, x_{20}) = r$ stets der Satz 7.8.1 anwendbar und somit stets die Level-Menge lokal ein Graph einer C^1-Funktion. Da das Bild von h ganz $\mathbb{R}$ ist, gilt dies also für alle $r \in \mathbb{R}$. Dass $h(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}$ kann man wie folgt sehen. $\phi(y_1, y_2) = 2\sinh(y_2) - 2$, und die Funktion $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist surjektiv, also nimmt ϕ, wenn y_2 $\mathbb{R}$ durchläuft, alle Werte in $\mathbb{R}$ an. Die Komposition ist gegeben durch $h(x_1,x_2) = \phi(f_1(x_1,x_2), f_2(x_1,x_2))$, und die zweite Komponente von f ist

$$f_2(x_1,x_2) = \frac{x_1^2}{2} - x_1x_2 + \frac{x_2^2}{2} + x_2 = \frac{1}{2}(x_1 - x_2)^2 + x_2.$$

Dies nimmt wiederum alle Werte in $\mathbb{R}$ an (man kann zum Beispiel für beliebiges $t \in \mathbb{R}$, $f(t,t) = t$ setzten). Also nimmt auch die Komposition h alle Werte in $\mathbb{R}$ an. Dies beendet unsere Betrachtungen zu (d).

Anmerkung zum Satz über implizite Funktionen:

Betrachten Sie eine C^1-Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Für beliebige $r \in \mathbb{R}$, definieren wir die folgende Menge

$$E_r := f^{-1}(r) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = r\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Man bemerke, dass wenn r nicht im Bild von f ist, dann gilt $E_r = \emptyset$. Nehmen wir also r im Bild von f. Wir betrachten einen beliebige Punkt $(x_0, y_0) \in E_r$. Falls $\partial_x f(x_0, y_0) \neq 0$, dann können wir mithilfe des Satzes von der impliziten Funktion (Satz 7.8.1) schliessen, dass $\varepsilon > 0$ und eine C^1-Funktion $g : (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon) \to \mathbb{R}$ existieren, sodass

$$E_r \cap U = \{(g(y), y) \in \mathbb{R}^2 : y \in (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)\}$$

für eine Umgebung $U \subset \mathbb{R}^2$ von (x_0, y_0). Wir sagen, dass E_r, lokal um den Punkt (x_0, y_0), der Graph einer C^1-Funktion der Variable y ist.

Falls $\partial_y f(x_0, y_0) \neq 0$, dann können wir mithilfe des Satzes von der impliziten Funktion analog schliessen, dass $\varepsilon > 0$ und eine C^1-Funktion $g : (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \to \mathbb{R}$ existieren, sodass

$$E_r \cap U = \{(x, g(x)) \in \mathbb{R}^2 : x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)\}$$

für eine Umgebung $U \subset \mathbb{R}^2$ von (x_0, y_0). Wir sagen, dass E_r, lokal um den Punkt (x_0, y_0), der Graph einer C^1-Funktion der Variable x ist.

Beispiel. Man erinnere sich, dass

$$\operatorname{sgn}(t) := \begin{cases} 1 & \text{falls } t > 0 \\ 0 & \text{falls } t = 0 \\ -1 & \text{falls } t < 0. \end{cases}$$

Wir definieren die glatte Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x, y) := x^2 + 3y^2 \quad \forall\, (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Das Bild von f ist gerade $\{r \in \mathbb{R},\, r \geq 0\}$. Also gilt $E_r = \emptyset$ für $r < 0$ und $E_r \neq \emptyset$ für $r \geq 0$. Wir betrachten ein beliebiges $r \geq 0$ und wir fragen uns, um welche Punkte $(x_0, y_0) \in E_r$ die Menge E_r lokal der Graph einer Funktion der Variable y ist. Wir berechnen

$$\partial_x f(x, y) = 2x \quad \forall\, (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

und wir bemerken, dass $\partial_x f(x,y) = 2x \neq 0$ genau dann, wenn $x \neq 0$. Wir schliessen mithilfe des Satzes von der impliziten Funktion, dass E_r der Graph einer Funktion der Variablen y lokal um (x_0, y_0) ist, falls $x_0 \neq 0$. Tatsächlich, falls $(x_0, y_0) \in E_r$ mit $x_0 \neq 0$, dann ist die Funktion $g : (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon) \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$g(y) := \operatorname{sgn}(x_0)\sqrt{r^2 - 3y^2} \qquad \forall\, y \in (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$$

mit

$$\varepsilon := \min\left\{ \left|\frac{r}{\sqrt{3}} - y_0\right|, \left|\frac{r}{\sqrt{3}} + y_0\right| \right\}.$$

g erfüllt

$$E_r \cap U = \{(g(y), y) \in \mathbb{R}^2 : (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)\}$$

mit

$$U := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)\}.$$

Falls wir uns fragen, um welche Punkte $(x_0, y_0) \in E_r$ die Menge E_r lokal der Graph einer Funktion der Variable x ist, dann berechnen wir analog

$$\partial_y f(x,y) = 6y \quad \forall\, (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

und wir bemerken, dass $\partial_y f(x,y) = 6y \neq 0$ genau dann, wenn $y \neq 0$. Wir schlissen mithilfe des Satzes von der impliziten Funktion, dass E_r der Graph einer Funktion der Variable x lokal um (x_0, y_0) ist, falls $y_0 \neq 0$. Tatsächlich, falls $(x_0, y_0) \in E_r$ mit $y_0 \neq 0$, dann ist die Funktion $g : (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$g(x) := \operatorname{sgn}(y_0)\sqrt{\frac{r^2 - x^2}{3}} \qquad \forall\, y \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$$

mit

$$\varepsilon := \min\Big\{|r - x_0|, |r + x_0|\Big\}$$

g erfüllt dann

$$E_r \cap U = \{(x, g(x)) \in \mathbb{R}^2 : (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)\}.$$

mit

$$U := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)\}.$$

8. Graph von C^1-Funktion (Prüfung 2019)

Beweisen Sie, dass für die Funktion:

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) := 2e^x + y(x-1) - y^2,$$

die Level-Menge $f^{-1}(\{0\})$ lokal um den Punkt $(0, 1)$ (d.h. in einer Umgebung $U \times V$ von $(0, 1)$) als Graph $(x, g(x))$ einer C^1-Funktion $g : U \to V$, wobei U eine Umgebung von 0 und V eine Umgebung von 1 ist, darstellen lässt. Bestimmen Sie zudem $g'(0)$.

Lösung: Zuerst bemerken wir, dass f glatt ist als Komposition glatter Funktionen wie der Exponentialfunktion oder Polynomen. Zudem gilt:

$$f(0, 1) = 2e^0 + 1(0-1) - 1^2 = 2 - 1 - 1 = 0,$$

also $(0, 1) \in f^{-1}(\{0\})$. Die Aufgabe entspricht nun genau der Formulierung, welche durch den Satz über implizite Funktionen (Satz 7.8.1) behandelt wird. Das bedeutet, wir müssen nur beweisen, dass:

$$\partial_y f(0, 1) \neq 0,$$

also die Ableitung bezüglich der Variablen, nach der wir lokal auflösen wollen, muss invertierbar sein. Der Rest der Aussage folgt dann aus der Formulierung von Satz 7.8.1.

Wir berechnen:

$$\partial_y f(x, y) = x - 1 - 2y \Rightarrow \partial_y f(0, 1) = -1 - 2 = -3 \neq 0,$$

also ist Satz 7.8.1 anwendbar. Nun existiert also eine C^1-Funktion g in einer Umgebung von 0 mit $g(0) = 1$, sodass:

$$h(x) := f(x, g(x)) = 0, \forall x \in U$$

Benutzen wir nun die Kettenregel 2.Version, so folgt:

$$0 = \partial_x h(x) = df(x, g(x)) \begin{pmatrix} 1 \\ g'(x) \end{pmatrix}, \forall x \in U$$

Also

$$\begin{pmatrix} \partial_x f(x, g(x)) & \partial_y f(x, g(x)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ g'(x) \end{pmatrix} = \partial_x f(x, g(x)) + \partial_y f(x, g(x)) g'(x) = 0$$

für $x \in U$. Wir berechnen:

$$\partial_x f(x, y) = 2e^x + y.$$

Setzen wir nun in den Formeln oben $x = 0$, $y = g(0) = 1$ finden wir

$$3 - 3g'(x) = 0$$

Also:

$$g'(0) = 1.$$

Insbesondere ist die lineare Approximation von g gegeben durch:

$$g(x) \simeq g(0) + g'(0)x = 1 + x$$

9. Satz von Green

Es sei:

$$D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ 3x + y \leq 3\}$$

Ferner sei folgendes Vektorfeld $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben:

$$v(x, y) := \begin{pmatrix} x + y^2 \\ 4x^2y - 2y^3 \end{pmatrix}$$

(a) Berechnen Sie das folgende Integral:

$$\int_{\partial D} v\ \vec{dl},$$

ohne den Satz von Green.

Bemerkung: Erinnern Sie sich an die Definition des Integrals:

$$\int_{\partial D} v\ \vec{dl} = \int_a^b v(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) dt,$$

wobei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ eine Parametrisierung von ∂D ist, sodass D jeweils zur linken des Weges γ in Durchlaufrichtung liegt.

(b) Berechnen Sie das folgende Integral:

$$\int_{\partial D} v\ \vec{dl},$$

mit den Satz von Green.

Lösung: Wir berechnen das Wegintegral des Vektorfeldes v entlang des Randes direkt. Dazu müssen wir die Orientierung so wählen, dass entlang des Pfades das Innere von D jeweils zur Linken liegt, d.h. im Gegenuhrzeigersinn (man muss hiermit aber aufpassen, insbesondere bei Mengen wie $B_1(0) \setminus B_{1/2}(0)$). Wir parametrisieren den Rand in 3 Teilstücken:

$$\begin{aligned}
\gamma_1 : [0,3] \to \mathbb{R}^2, &\quad \gamma_1(t) := (0,t) \\
\gamma_2 : [0,1] \to \mathbb{R}^2, &\quad \gamma_2(t) := (t, 3-3t) \\
\gamma_3 : [0,1] \to \mathbb{R}^2, &\quad \gamma_3(t) := (1-t, 0)
\end{aligned}$$

Wir bemerken, dass wir die Wege so orientiert haben, dass gilt:

$$\int_{\partial D} v \; \vec{dl} = -\left(\int_{\gamma_1} v \; \vec{dl} + \int_{\gamma_2} v \; \vec{dl} + \int_{\gamma_3} v \; \vec{dl} \right)$$

Das heisst, wir haben die Elemente umgekehrt orientiert. Wir berechnen die Integrale nun direkt. Man beachte, dass per Definition gilt:

$$\int_{\gamma_1} v \; \vec{dl} = \int_0^3 v(\gamma_1(t))\dot{\gamma}_1(t)dt$$

Dies kann auch als das Integral der 1-Form $\omega = (x+y^2)dx + (4x^2y - 2y^3)dy$ betrachtet werden. Diese Dualität ist klar dank der Definition und Kapitel 7.4 im Skript. Man beachte insbesondere, dass das Integral unabhängig von Reparametrisierungen ist (siehe Bemerkung 7.4.1.i)), also wären auch beliebige andere, orientierungserhaltende Parametrisierungen von γ_1 zulässig. Wir berechnen:

$$\dot{\gamma}_1(t) = (0,1), \quad \forall t \in [0,3]$$

Daher gilt:

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_1} v \; \vec{dl} &= \int_0^3 v(\gamma_1(t))\dot{\gamma}_1(t)dt \\
&= \int_0^3 v(0,t) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} dt \\
&= \int_0^3 -2t^3 dt \\
&= -\frac{1}{2} t^4 \Big|_{t=0}^{t=3} = -\frac{81}{2}
\end{aligned}$$

Analog gilt für γ_2:

$$\dot{\gamma}_2(t) = (1,-3), \quad \forall t \in [0,1],$$

und daher:

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_2} v\ \vec{dl} &= \int_0^1 v(\gamma_2(t))\dot{\gamma}_2(t)dt \\
&= \int_0^1 \begin{pmatrix} t+(3-3t)^2 \\ 4t^2(3-3t)-2(3-3t)^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} dt \\
&= \int_0^1 9-17t+9t^2-3(3-3t)(-14t^2+36t-18)dt \\
&= \int_0^1 9-17t+9t^2+(1-t)(126t^2-324t+162)dt \\
&= \int_0^1 9-17t+9t^2+126t^2-324t+162-126t^3+324t^2-162tdt \\
&= \int_0^1 171-503t+459t^2-126t^3dt \\
&= 171-\frac{503}{2}+153-31-\frac{1}{2}=41
\end{aligned}$$

Zuletzt haben wir:

$$\dot{\gamma}_3(t)=(-1,0), \quad \forall t\in[0,1],$$

und folglich:

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_3} v\ \vec{dl} &= \int_0^1 v(\gamma_3(t))\dot{\gamma}_3(t)dt \\
&= \int_0^1 v(1-t,0)\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} dt \\
&= \int_0^1 t-1dt \\
&= \left(\frac{1}{2}t^2-t\right)\Big|_{t=0}^{t=1} = -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Summieren ergibt daher:

$$\int_{\partial D} v\ \vec{dl} = -\left(-\frac{81}{2}+41-\frac{1}{2}\right)=\frac{82}{2}-41=0$$

Dies beendet die Betrachtungen zu (a).

Um den Satz von Green anzuwenden, bemerken wir zuerst, dass D ein C^1_{pw}-Gebiet ist und v glatt ist auf $\mathbb{R}^2$. Daher können wir den Satz von Green anwenden und somit das Randintegral über ein Flächenintegral der Rotation bestimmen. Die Rotation von v ist:

$$\operatorname{rot} v = \partial_x\left(4x^2y-2y^3\right)-\partial_y\left(x+y^2\right)=8xy-2y$$

Wir bemerken, dass gemäss Satz 8.4.3 das Vektorfeld v also nicht konservativ ist, also können wir das Integral nicht direkt als 0 identifizieren. Daher finden wir mit dem Satz von Green:

$$\begin{aligned}
\int_{\partial D} v \, \vec{dl} &= \int_D \operatorname{rot} v \, d\mu \\
&= \int_D 8xy - 2y \, d\mu \\
&= \int_0^1 \int_0^{3-3x} 8xy - 2y dy dx \\
&= \int_0^1 \left(4xy^2 - y^2\right) \Big|_{y=0}^{y=3-3x} dx \\
&= \int_0^1 4x(3-3x)^2 - (3-3x)^2 dx \\
&= \int_0^1 -9 + 54x - 81x^2 + 36x^3 dx \\
&= \left(-9x + 27x^2 - 27x^3 + 9x^4\right) \Big|_{x=0}^{x=1} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Dies beendet die Teilaufgabe (b).

10. Volumen

(a) Berechnen Sie das Volumen der folgenden Teilmenge von $\mathbb{R}^3$:

$$K := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2 + y^2 \leq z^2, 1 \leq z \leq 2\right\},$$

indem Sie Zylinderkoordinaten verwenden.

(b) Schreiben Sie die Fläche:

$$S := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2 + y^2 = z^2, 1 \leq z \leq 2\right\},$$

als Vereinigung von zwei geeigneten Graphen.

(c) Berechnen Sie zudem die Oberfläche von K.

Lösung: Zylinder-Koordinaten sind gegeben durch den Diffeomorphismus:

$$\Phi :]0, +\infty[\times]-\pi, \pi[\times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad \Phi(r, \varphi, h) := \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \\ h \end{pmatrix}$$

Aus Serie 11 wissen wir, dass Φ ein Diffeomorphismus ist und das Bild von Φ gerade $\mathbb{R}^3$ ohne die Halbebene:

$$E := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0, x \leq 0\}$$

Wir schreiben nun K mit den Zylinderkoordinaten um:

$$x^2 + y^2 = r^2 \cos(\varphi)^2 + r^2 \sin(\varphi)^2 = r^2,$$

also:

$$x^2 + y^2 \leq z^2 \Rightarrow r^2 \leq z^2 = h^2 \Rightarrow r \leq h,$$

sowie:

$$1 \leq h \leq 2.$$

Um Satz 8.5.2 anzuwenden, müssen wir geeignete beschränkte Teilmengen von $]0, +\infty[\times] - \pi, \pi[\times\mathbb{R}$, deren Abschluss ebenfalls in dieser Menge enthalten ist, auswählen. Dazu definieren wir für $\varepsilon > 0$:

$$\Omega_\varepsilon := \Big\{(r, \varphi, h) \in]0, +\infty[\times] - \pi, \pi[\times\mathbb{R} \;\Big|\; \varepsilon < r < h, 1 < h < 2, -\pi + \varepsilon < \varphi < \pi - \varepsilon\Big\},$$

und wir bemerken, dass Ω_ε offen, beschränkt sind mit $\overline{\Omega_\varepsilon} \subset]0, +\infty[\times] - \pi, \pi[\times\mathbb{R}$. Hier lässt sich also nun Satz 8.5.2 anwenden:

$$\int_{\Phi(\Omega_\varepsilon)} 1 \; d\mu(x, y, z) = \int_{\Omega_\varepsilon} r d\mu(r, \varphi, h) = \int_1^2 \int_\varepsilon^h \int_{-\pi+\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} r d\varphi dr dh$$

Lassen wir $\varepsilon \to 0$, so konvergiert die rechte Seite gegen:

$$\int_1^2 \int_0^h \int_{-\pi}^{\pi} r d\varphi dr dh$$

Die linke Seite der Gleichung konvergiert dagegen gegen:

$$\int_{K \setminus E} 1 \; d\mu = \int_K 1 \; d\mu,$$

wobei letztere Gleichung folgt, da $\mu(E) = 0$. Dies folgt, da $\Phi(\Omega_\varepsilon)$ die Menge $K \setminus E$ ausfüllen für $\varepsilon \to 0$. Daher folgt nun:

$$\begin{aligned}
\mu(K) &= \int_1^2 \int_0^h \int_{-\pi}^{\pi} r d\varphi dr dh \\
&= \int_1^2 \frac{1}{2} h^2 dh \cdot 2\pi \\
&= \frac{7}{3}\pi
\end{aligned}$$

Dies löst (a).

Wir schreiben die Oberfläche als zwei Graphen über die xz-Ebene. Der Definitionsbereich für die Graphen ist gegeben durch alle $(x, 0, z) \in K$, also alle (x, z), welche die folgenden Bedingungen erfüllen:

$$1 < z < 2, \quad |x| \leq z$$

Wir definieren daher:

$$U := \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 : 1 < z < 2, -z < x < z\},$$

sowie:

$$\Psi_1 : U \to \mathbb{R}, \quad \Psi_1(x, z) = \sqrt{z^2 - x^2},$$

sowie:

$$\Psi_2 : U \to \mathbb{R}, \quad \Psi_2(x, z) = -\sqrt{z^2 - x^2}.$$

Man bemerke, dass die Graphen von Ψ_1 und Ψ_2 gerade S entsprechen, bis auf $S \cap (\{z = 1\} \cup \{z = 2\} \cup \{y = 0\})$. Da diese Menge aber verschwindende Oberfläche besitzt, haben wir die gewünschte Zerlegung gefunden. Man beachte, dass Ψ_1, Ψ_2 Immersionen sind, denn das Bild des Differentials hat stets Dimension 2, siehe die Berechnung in (c). Das beendet die Teilaufgabe (b).

Um (c) zu lösen, beachten wir Definition 8.6.2 des Flächeninhalts einer Oberfläche. Wir bemerken zuerst, dass für $z = 1$ und $z = 2$ die Oberfläche von K zwei Kreise mit Radius 1 und 2 sind, also haben diese zusammen die Fläche:

$$1^2 \cdot \pi + 2^2 \cdot \pi = 5 \cdot \pi$$

Das letzte Stück der Oberfläche ist gemäss (b) durch die Graphen von Ψ_1 und Ψ_2 gegeben. Dies sind Immersionen, also parametrisieren diese tatsächlich Flächenstücke in 3D. Wir beachten, dass die Mengen $\{x = z\} \cap K, \{x = -z\} \cap K$ nicht in der Vereinigung der zwei Graphen enthalten ist. Da diese Mengen aber Geraden sind, haben diese Flächeninhalt 0 und wir können diese ignorieren, ohne den Flächeninhalt zu verändern.

Wir betrachten Ψ_1, Ψ_2 lässt sich dann vollkommen analog betrachten. Es ist:

$$\Psi_1 : U \to \mathbb{R}^3, \quad \Psi_1(u, v) := \begin{pmatrix} u \\ \sqrt{v^2 - u^2} \\ v \end{pmatrix}$$

Das Bild von Ψ_1 sei S_1, dann gilt:

$$\mu_2(S_1) = \int_{S_1} 1 \, d\sigma = \int_U |\partial_u \Psi_1 \times \partial_v \Psi_1| \, d\mu(u,v),$$

gemäss Definition 8.6.2, denn das skalare Oberflächenelement ist informell:

$$d\sigma = |\partial_u \Psi_1 \times \partial_v \Psi_1| \, d\mu$$

Wir berechnen also direkt:

$$\partial_u \Psi_1(u,v) = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-u}{\sqrt{v^2-u^2}} \\ 0 \end{pmatrix},$$

und vollkommen analog sieht man:

$$\partial_v \Psi_1(u,v) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{v^2-u^2}} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Daher finden wir mit der Definition des Kreuzproduktes:

$$\partial_u \Psi_1 \times \partial_v \Psi_1(u,v) = \begin{pmatrix} -\frac{u}{\sqrt{v^2-u^2}} \\ -1 \\ \frac{v}{\sqrt{v^2-u^2}} \end{pmatrix}$$

Nehmen wir die Norm, so sehen wir:

$$|\partial_u \Psi_1 \times \partial_v \Psi_1(u,v)| = \sqrt{1 + \frac{u^2+v^2}{v^2-u^2}} = \sqrt{\frac{2v^2}{v^2-u^2}} = \frac{\sqrt{2}v}{\sqrt{v^2-u^2}},$$

wobei wir $1 < v < 2$ und somit $|v| = v$ verwendet haben. Somit wissen wir also:

$$\mu_2(S_1) = \int_U \frac{\sqrt{2}v}{\sqrt{v^2-u^2}} \, d\mu(u,v) = \int_1^2 \int_{-v}^{v} \frac{\sqrt{2}v}{\sqrt{v^2-u^2}} \, dudv$$

Wir berechnen das Integral nun:

$$\begin{aligned} \mu_2(S_1) &= \int_1^2 \int_{-v}^{v} \frac{\sqrt{2}v}{\sqrt{v^2-u^2}} \, dudv \\ &= \int_1^2 \int_{-v}^{v} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{v}\right)^2}} \, dudv \\ &= \int_1^2 \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-w^2}} \, vdwdv, \end{aligned}$$

wobei wir die Substitution $w = u/v$ vorgenommen haben. Wir wissen, dass $1/\sqrt{1-x^2}$ die Stammfunktion $\arcsin(x)$ besitzt. Also:

$$\int_1^2 \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-w^2}}\, v dw dv = \int_1^2 \sqrt{2} v \left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) dv = \int_1^2 \sqrt{2}\pi \cdot v dv$$

Daher sehen wir nun:

$$\mu_2(S_1) = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi \cdot (4-1) = \frac{3\sqrt{2}}{2}\pi$$

Da die Berechnungen für Ψ_2 vollkommen analog sind, ist also die Oberfläche von K gegeben durch:

$$2 \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2}\pi + 5\pi = \left(5 + 3\sqrt{2}\right)\pi$$

Dies beendet unsere Berechnungen für (c).