

1.1. Bolzano-Weierstrass

Zeigen Sie, dass die folgenden Folgen eine konvergente Teilfolge haben.

(a) $a_n = \frac{(n^2+50n+2) \cos(n^2+n)}{n^2+n+1}$,

(b) $b_n = \frac{(-1)^n}{n}$,

Hinweis: Überlegen Sie sich wieso es reicht, die Beschränktheit der Folge zu zeigen.

1.2. Zwischenwertsatz

Sei $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ein beliebiges Polynom *ungeraden* Grades $p = \sum_{k=0}^n a_k x^k$. Das Ziel der Aufgabe ist es zu zeigen, dass p mindestens eine Nullstelle haben muss.

(a) Zeigen Sie, dass wir o.B.d.A. annehmen können, dass $a_n = 1$

Hinweis: Betrachten Sie die Nullstellen von $p(x) = a_n(x^n + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{a_n} x^k)$.

(b) Zeigen Sie nun, dass es ein $M > 0$ gibt, sodass für alle $x > M > 0$ gilt $f(x) > 0$ und für alle $x < -M < 0$, $f(x) < 0$.

(c) Argumentieren Sie mit Hilfe des Zwischenwertsatzes, warum p eine Nullstelle haben muss.

1.3. Partielle Integration

Lösen Sie die folgenden Integrale mit Hilfe von partieller Integration.

(a) $\int_{-\pi}^{\pi} 4x \cos(2 - 3x) dx$,

(b) $\int_6^0 (2 + 5x)e^{\frac{1}{3}x} dx$,

(c) $\int_{-\pi}^{\pi} (3x + x^2) \sin(2x) dx$.

1.4. Variation der Konstanten

Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen, indem Sie zuerst eine homogene Lösung finden und dann Variation der Konstanten anwenden.

(a) $y' - 3y = e^{5x}$,

(b) $y' - 3y = e^{3x}$,

(c) $y' - y = \sin x$,

1.5. Online-Aufgaben

Abgabe der Multiple-Choice Aufgaben: Online auf Moodle

Es sind jeweils mehrere Antworten möglich.

(a) Sei f eine Funktion mit folgender Taylorreihenentwicklung in der Nähe von $z = 1$.

$$f(z) = 1 + (1 - z) + (1 - z)^2 + \dots$$

Dann ist f gegeben durch

(i) $\frac{1}{z}$

(ii) $\frac{-1}{z-2}$

(iii) $\frac{z-1}{z+1}$

(iv) $\frac{1}{2z-1}$

(b) Welche der folgenden Aussagen impliziert, dass f auf $[a, b]$ eine Nullstelle hat.

(i) $f(a)f(b) = 0$.

(ii) $f(a)f(b) < 0$.

(iii) Beide der vorherigen Antworten.