2.1. Umwandeln von Differentialgleichungen höherer Ordnung

Schreiben Sie die folgenden Differentialgleichungen 2. und 3. Ordnung als Differentialgleichungen 1. Ordnung unter Verwendung vektorwertiger Funktionen:

(a) $y'' + y' - 2y = 0$;

(b) $y''' - 4y'' = 0$.

2.2. Fundamentallösungen für 2×2-Matrizen

Bestimmen Sie für die folgenden Matrizen die Fundamentallösung der Differentialgleichung für stetig differenzierbares $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$:

$$\frac{dF(t)}{dt} = AF(t)$$

(a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$

(b) $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$

(c) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$

(d) $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$

2.3. Federpendel

In der Vorlesung wurde das Federpendel besprochen. Hierbei bezeichne $f(t)$ die Auslenkung eines Teilchens aus seiner Ruheposition, welches durch eine Feder zurück in die Ruheposition gedrückt wird. Die wirkende Kraft ist proportional zur Auslenkung und zeigt in Richtung Ruheposition, also:

$$F_{Feder} = -Kf,$$

wobei $K > 0$ die Federkonstante ist. Nach Newton fanden wir:

$$mf'' = -Kf \quad \Rightarrow \quad f'' = -\frac{K}{m}f$$

Hier ist m die Masse des Teilchens und wir nehmen fortan an, dass $m = 1$. Ziel dieser Aufgabe ist es, die Gleichung etwas zu modifizieren, indem ein Reibungsterm eingeführt wird.

(a) Wir nehmen an, dass das System Reibung ausgesetzt wird. Die Reibung ist proportional zur Geschwindigkeit und zeigt auch in Richtung Ruheposition, da Reibung die Bewegung verlangsamt:

$$F_{Reibung} = -df' = -2\delta f',$$

wobei $\delta > 0$ durch den Reibungskoeffizienten $d := 2m\delta = 2\delta$ bestimmt ist. Der Faktor 2 könnte in δ absorbiert werden, erleichtert aber gewisse Berechnungen. Wie sieht die Newton-Gleichung des Systems unter Reibung aus?

(b) Nehmen Sie an, dass $\delta^2 - K \neq 0$ (Dies garantiert, dass wir zwei verschiedene Lösungen per einfachem Exponentialansatz finden). Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Systems.

Hinweis: Unterscheiden Sie die Fälle $\delta^2 - K > 0$ und $\delta^2 - K < 0$.

(c) Betrachten Sie die Lösung für $t \to +\infty$. Wie verhält sich das System? Deckt sich dies mit Ihrer physikalischen Intuition?

Hinweis: Analysieren Sie insbesondere, inwiefern die Lösungen oszillieren und inwiefern $\delta > 0$ die Lösungen beeinflusst. Es kann hilfreich sein, die Funktionen zu plotten/skizzieren.

Bemerkung: Beachten Sie, dass dieses Beispiel auch im Skript von Michael Struwe behandelt wird. Dort können Sie auch Graphen der Lösungen finden.

2.4. Potenzreihen

Berechnen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen und die Ableitung dieser Potenzreihen innerhalb des Konvergenzradius.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}2^n}$; **(b)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n3^n}$.

2.5. Online-Aufgaben

Abgabe der Multiple-Choice Aufgaben: Online auf Moodle.

Es sind jeweils mehrere Antworten möglich.

(a) Betrachten Sie die folgende Differentialgleichung:

$$y'' + y = 0$$

Der Exponentialansatz liefert die folgenden Lösungen:

(i) e^{it}, e^{-it}

(ii) e^t, e^{-t}

(iii) $\cos(t), \sin(t)$

(iv) $\cosh(t), \sinh(t)$

(b) Betrachten Sie die folgende Differentialgleichung:

$$y'' - y = 0$$

Der Exponentialansatz liefert die folgenden Lösungen:

(i) e^{it}, e^{-it}

(ii) e^t, e^{-t}

(iii) $\cos(t), \sin(t)$

(iv) $\cosh(t), \sinh(t)$

(c) Betrachten Sie die folgende Differentialgleichung:

$$y'' + 2y' + y = 0$$

Der Exponentialansatz liefert die folgenden Lösungen:

(i) e^{-t}, aber te^{-t} ist auch eine Lösung.

(ii) e^t, aber te^t ist auch eine Lösung.

(iii) e^t, e^{-t}

(iv) e^t ist die einzige Lösung bis auf Multiplikation mit einer Konstanten.