3.1. Produkte von Differentialoperatoren

Ziel dieser Aufgabe ist es, die folgende Notation (siehe S.109 ganz oben im Skript) etwas besser zu verstehen:

$$p(D) = \prod_{i=1}^{l} (D - \lambda_i \cdot Id)^{m_i},$$

für reelle Polynome $p(x) = \prod_{i=1}^{l} (x - \lambda_i)^{m_i}$, wobei $m_i \in \mathbb{N}$ und $\lambda_i \in \mathbb{R}$.

(a) Betrachten wir zuerst den Fall $l = 1$ und $m_1 = 1$, also das Polynom:

$$p(x) = x - \lambda_1, \quad p(D) = D - \lambda_1 \cdot Id$$

Was ist das Resultat der Evaluation:

$$p(D)f = (D - \lambda_1 \cdot Id)f,$$

für f stetig differenzierbar?

(b) Betrachten Sie nun den Fall $l = 1, m_1 = 2$. Evaluieren Sie $(D - \lambda_1 \cdot Id)^2 f$ für f zweimal stetig differenzierbar.

(c) Betrachten Sie nun den Fall $l = 2, m_1 = m_2 = 1$, also:

$$(D - \lambda_1 \cdot Id)(D - \lambda_2 \cdot Id)f$$

Evaluieren Sie diesen Ausdruck für f zweimal stetig differenzierbar.

(d) Wir betrachten die folgende Differentialgleichung:

$$(D - 2 \cdot Id)^2 (D - 3 \cdot Id)f = 0,$$

für f dreimal stetig differenzierbar. Schreiben Sie diese Differentialgleichung in die folgende Form um:

$$a_3 f''' + a_2 f'' + a_1 f' + a_0 f = 0,$$

für geeignete $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$.

(e) Beweisen Sie die folgende Identität:

$$\prod_{i=1}^{l} (D - \lambda_i \cdot Id)^{m_i} (e^{\lambda_0 t}) = \prod_{i=1}^{l} (\lambda_0 - \lambda_i)^{m_i} e^{\lambda_0 t},$$

für beliebige $l \in \mathbb{N}, \lambda_i \in \mathbb{R}, m_i \in \mathbb{N}$ und $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, sodass:

$$\lambda_0 \neq \lambda_i, \quad \forall i \in \{1, \dots, l\}$$

Hinweis: Argumentieren Sie induktiv. Beweisen Sie zuerst mit Hilfe von Induktion in m_i, dass:

$$(D - \lambda_i)^{m_i} e^{\lambda_0 t} = (\lambda_0 - \lambda_i)^{m_i} e^{\lambda_0 t},$$

für beliebiges $m_i \in \mathbb{N}$ und nutzen Sie dieses Wissen für die Induktion in l.

3.2. Homogene Differentialgleichungen

Bestimmen Sie die allgemeinen Lösungen $y = y(x)$ der folgenden Differentialgleichungen:

(a) $y'' + y' - 2y = 0$;

(b) $y^{(4)} - 4y'' = 0$.

(c) $y^{(4)} - 10y^{(3)} + 33y'' - 40y' + 16y = 0$

3.3. Federpendel mit externer Kraft

Wir erinnern uns an die Bewegungsgleichung des Federpendels aus Serie 2:

$$mf'' = -Kf - df',$$

wobei m die Masse, K eine Konstante zur Stärke der Federkraft ist und d ein Reibungskoeffizient ist. Wie in Serie 2 schreiben wir

$$K = m\omega_0^2, \quad d = 2m\delta,$$

und die Federpendel-Gleichung hat dann die folgende Form:

$$f'' + 2\delta f' + \omega_0^2 f = 0$$

Ziel dieser Aufgabe ist es, das Federpendel unter dem Einfluss einer externen Kraft zu studieren.

(a) Wir nehmen an, es wirkt eine periodische Kraft auf das Pendel mit der Stärke:

$$b(t) := b_0 \cos(\omega t)$$

Man beachte, dass die Stärke der Kraft von der Zeit abhängt. Begründen Sie, unter Verwendung des Newton-Gesetzes, warum die Bewegungsgleichung unter Einschluss dieser periodischen Kraft die folgende Form hat:

$$f'' + 2\delta f' + \omega_0^2 f = \beta_0 \cos(\omega t),$$

wobei $b_0 = m\beta_0$.

Bemerkung: Beachten Sie den Unterschied $\omega_0 \neq \omega$ a priori!

(b) Diese DGL lässt sich gemäss Satz 5.7.1 mittels des Ansatzes:

$$f = f_{hom} + f_{part},$$

lösen, wobei f_{hom} die allgemeine Lösung der homogenen DGL ist:

$$f''_{hom} + 2\delta f'_{hom} + \omega_0^2 f_{hom} = 0,$$

und f_{part} eine beliebige Lösung der DGL mit externer Kraft. Wie sieht f_{hom} aus?

(c) Bevor wir f_{part} bestimmen, lösen wir ein verwandtes Problem: Wir machen den folgenden Ansatz:

$$\tilde{f}_{part}(t) = ce^{i\omega t},$$

wobei ω der gleiche Parameter wie in $b(t)$ ist. Bestimmen Sie $c \in \mathbb{C}$, sodass:

$$\tilde{f}''_{part} + 2\delta \tilde{f}'_{part} + \omega_0^2 \tilde{f}_{part} = \beta_0 e^{i\omega t}$$

Hinweis: Werten Sie die Differentialgleichung für $\tilde{f}_{part}(t) = ce^{i\omega t}$ direkt aus und erinnern Sie sich, dass $(e^{i\omega t})' = i\omega e^{i\omega t}$. Dies folgt, da $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$.

(d) Schreiben Sie $c = Re^{i\varphi}$ in Polarkoordinaten. Was sind die Formeln für $R \in \mathbb{R}$ und $\varphi \in]-\pi, 0]$?

Hinweis: Man interpretiert φ als die Phasenverschiebung und R als die Resonanz-Amplitude, siehe Skript Bsp. 5.7.1 i).

(e) Betrachten Sie den Fall $\omega_0 = \omega$. Was können Sie in diesem Fall über R und φ aussagen?

(f) Schreiben Sie $\tilde{f}_{part}(t) = Re^{i(\omega t + \varphi)}$. Wir definieren:

$$f_{part}(t) = \mathrm{Re}\ \tilde{f}_{part}(t) = R\cos(\omega t + \varphi)$$

Argumentieren Sie, dass f_{part} eine partikuläre Lösung der ursprünglichen DGL ist:

$$f''_{part} + 2\delta f'_{part} + \omega_0^2 f_{part} = \beta_0 \cos(\omega t)$$

3.4. Vergleich der charakteristischen Polynome

(a) Sei eine homogene gewöhnliche Differentialgleichung n-ter Ordnung gegeben,

$$f^{(n)} + a_{n-1}f^{(n-1)} + ... + a_1 f' + a_0 f = 0.$$

Sie haben in der Vorlesung gesehen, dass diese Gleichung einem Differentialgleichungssystem erster Ordnung entspricht,

$$\frac{dF}{dt} = AF.$$

Dabei hat die Matrix A die folgende Form:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie, dass das charakteristische Polynom der Differentialgleichung, $P(\lambda)$, und das charakteristische Polynom der Matrix A, $\chi_A(\lambda)$, in folgender Relation zueinander stehen:

$$P(\lambda) = (-1)^n \chi_A(\lambda).$$

Hinweis: Benutzen Sie die Ergebnisse für $n = 2, 3$ aus der Vorlesung und beweisen Sie die Aussage per Induktion.

3.5. Online-Aufgaben

Abgabe der Multiple-Choice Aufgaben: Online via Moodle.

Es sind jeweils mehrere Antworten möglich.

(a) Betrachten Sie die folgende DGL:

$$y'' - 2y = t$$

Machen Sie den Ansatz $y(t) = a \cdot t + b$ für $a, b \in \mathbb{R}$. Wie muss man a, b wählen, dass wir eine partikuläre Lösung erhalten?

(i) $a = -1/2, b = 0$

(ii) $a = 0, b = -1/2$

(iii) $a = 1/2, b = 0$

(iv) $a = 0, b = 1/2$

(b) Betrachten Sie die folgende DGL:

$$y'' + 2y = t^2$$

Machen Sie den Ansatz $y(t) = a \cdot t^2 + b \cdot t + c$ für $a, b, c \in \mathbb{R}$. Wie muss man a, b, c wählen, dass wir eine partikuläre Lösung erhalten?

(i) $a = -1/2, b = 0, c = 1/2$

(ii) $a = 0, b = -1/2, c = 0$

(iii) $a = 1/2, b = 0, c = -1/2$

(iv) $a = 0, b = 1/2, c = 0$