4.1. Inhomogene Differentialgleichungen

(a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichung:

$$2y'' + 3y' + 10y = 1.$$

Hinweis: Versuchen Sie, eine konstante Lösung als partikuläre Lösung zu finden.

(b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichung:

$$2y'' + 3y' + 10y = \sin(2x).$$

Hinweis: Versuchen Sie, eine Lösung der Form $A \cdot \sin(2x) + B \cdot \cos(2x)$ als partikuläre Lösung zu finden.

(c) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichung:

$$2y'' + 3y' + 10y = \sin(2x) + 1.$$

Hinweis: Verwenden Sie das Superpositionsprinzip, um eine partikuläre Lösung zu finden.

4.2. Matrix-Exponential nicht-diagonalisierbarer Matrizen

In dieser Aufgabe wollen wir die Techniken vermitteln, welche zur Lösung der DGL für $F \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$:

$$\frac{dF}{dt} = AF,$$

nötig sind, falls $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ nicht diagonalisierbar ist. Der diagonalisierbare Fall wurde in der Vorlesung und Serie 2 behandelt.

(a) Das Musterbeispiel einer nicht diagonalisierbaren Matrix ist die folgende:

$$A_\lambda := \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

für $\lambda \in \mathbb{R}$ oder auch $\lambda \in \mathbb{C}$. Wir betrachten den Fall $\lambda = 2$. Beweisen Sie, dass A_2 nicht diagonalisierbar ist.

(b) Zeigen Sie, dass mit:

$$N := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

gilt:

$$A_2 = 2Id + N$$

Berechnen Sie unter Verwendung von $Id \cdot N = N \cdot Id$ die Potenzen A_2^2, A_2^3, A_2^4 und A_2^5 von A_2.

Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass $N^2 = 0$.

(c) Stellen Sie eine Vermutung für die allgemeine Formel für A_2^n auf, für $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Beweisen Sie Ihre Vermutung (z.B. durch Induktion).

Hinweis: Schreiben Sie a_n für den Koeffizienten bei N in A_2^n und versuchen Sie mittels $A_2^{n+1} = A_2 \cdot A_2^n$ eine Rekursionsformel aufzustellen.

(d) Berechnen Sie nun $\exp(A_2 t)$ für $t \in \mathbb{R}$ durch direktes Einsetzen.

(e) Wir beenden die Aufgabe mit einer simplen Anwendung: Betrachten Sie die DGL 2.Ordnung

$$y'' - 4y' + 4y = 0$$

Zeigen Sie, dass diese DGL sich als DGL 1.Ordnung für die Funktion $F(t) = (y(t), y'(t))$ wie unten schreiben lässt:

$$\frac{dF}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} F =: AF$$

Um eine Jordan-Basis zu finden, verwenden Sie $e_2 = (-\frac{1}{2}, 0)$ als zweiten Basisvektor und $e_1 = Ae_2 - 2e_2$. Zeigen Sie, dass wenn S der Basiswechsel zur Basis e_1, e_2 ist, dann gilt:

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Nutzen Sie die Formel oben sowie die Techniken wie in Serie 2, um die Fundamentallösung für A zu bestimmen.

(f) Welche Form hat $y(t)$ gemäss der Formel der vorangehenden Aufgabe?

Bemerkung: Die hier gefundene Form von Lösung zeigt auch, wie man genügend Lösungen für beliebige DGL höherer Ordnung erhält, wenn der Exponentialansatz allein nicht ausreichend Lösungen produziert (i.e. weniger Lösungen als Korollar 5.6.1 verlangt). In Anwendungen verwendet man aber Satz 5.6.3 direkt!

4.3. Lipschitz-Stetigkeit des Skalarprodukts

Wir betrachten das Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ als Funktion

$$(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to x \cdot y \in \mathbb{R}.$$

Beachten Sie, dass $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$ äquivalent sind, wobei die Norm auf $\mathbb{R}^{2n}$ durch

$$\|(x, y)\|_{\mathbb{R}^{2n}}^2 = \|x\|_{\mathbb{R}^n}^2 + \|y\|_{\mathbb{R}^n}^2$$

ausgedrückt werden kann. Zeigen Sie, dass das Skalarprodukt für x, y im Einheitsball $B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$, also die Funktion

$$(x, y) \in B_1(0) \times B_1(0) \to x \cdot y \in \mathbb{R},$$

Lipschitz-stetig ist mit Lipschitz-Konstante $\sqrt{2}$.

Hinweis: Verwenden Sie die Cauchy-Schwarz Ungleichung.

4.4. Häufungspunkte von Folgen in der Ebene

Bestimmen Sie für die folgenden Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^2$ jeweils alle Häufungspunkte:

(a) $a_n := \left(\frac{1}{n}\cos\left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right), \sin\left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right)\right)$ **(b)** $a_n := \left(n\cos\left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right), n\sin\left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right)\right)$

Können Sie Beispiele von Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^2$ für ein beliebiges gegebenes $k \in \mathbb{N}$ geben, sodass die Folge genau k Häufungspunkte besitzt?

Bemerkung: Sie können sich auch überlegen, ob Sie Folgen mit unendlich vielen Häufungspunkten finden können.

4.5. Online-Aufgaben

Abgabe der Multiple-Choice Aufgaben: Online via Moodle.

Es sind jeweils mehrere Antworten möglich.

(a) Sei

$$A := \left\{ \frac{1}{n} \middle| n \in \mathbb{N} \right\} \subset \mathbb{R}.$$

Bestimmen Sie $\overline{A}$ (Abschluss von A in $\mathbb{R}$).

(i) $\overline{A} = \mathbb{R}$

(ii) $\overline{A} = A$

(iii) $\overline{A} = A \cup \{0\}$

(iv) $\overline{A} = \{x \in \mathbb{R} | \, x > 0\}$

(b) Sei

$$A := \mathbb{R}^2 \setminus \left\{ \left(0, \frac{1}{n}\right) \middle| n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\}.$$

Bestimmen Sie $\overline{A}$ (Abschluss von A in $\mathbb{R}^2$).

(i) $\overline{A} = \mathbb{R}^2$

(ii) $\overline{A} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

(iii) $\overline{A} = A$

(c) Sei

$$A := \mathbb{R}^2 \setminus \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| \, |y| \leq x^3 \right\}.$$

Bestimmen Sie $\overline{A}$ (Abschluss von A in $\mathbb{R}^2$).

(i) $\overline{A} = \mathbb{R}^2$

(ii) $\overline{A} = \mathbb{R}^2 \setminus \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| \, |y| < x^3 \right\}$

(iii) $\overline{A} = A$

(iv) $\overline{A} = A \cup \{(0,0)\}$