5.1. Abschluss, Inneres und Rand

Bestimmen Sie für jede der unteren Mengen Y den Abschluss, das Innere sowie den Rand:

(a) $Y := [0,1]$

(b) $Y := \emptyset$

(c) $Y := [-1,1[\setminus\{0\}$

(d) $Y := \{0\}$

(e) $Y := \mathbb{Q}$

(f) $Y :=]0,1[$

(g) $Y := [0,+\infty[$

(h) $Y := \left\{ \frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$

5.2. Inklusionen von Abschlüssen

Es sei $A \subset \mathbb{R}^2$ eine beliebige Teilmenge.

(a) Beweisen Sie, dass:

$$\overline{A} \supseteq \overline{\mathring{\overline{A}}}$$

(b) Beweisen Sie ebenso, dass:

$$\mathring{A} \subseteq \mathring{\overline{\mathring{A}}}$$

(c) Finden Sie Gegenbeispiele zu den umgekehrten Inklusionen.

(d) Beweisen Sie die folgenden Gleichungen:

$$\mathring{\overline{A}} = \mathring{\overline{\mathring{\overline{A}}}}, \quad \overline{\mathring{A}} = \overline{\mathring{\overline{\mathring{A}}}}$$

5.3. Offen, Abgeschlossen und/oder Kompakt

Bestimmen Sie für die folgenden Mengen $A \subset \mathbb{R}^3$, ob diese offen, abgeschlossen und/oder kompakt sind.

(a) $A_1 := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2 + y^2 = z^2\right\}$

(b) $A_2 := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2 + y^4 + z^6 = 4\right\}$

(c) $A_3 := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; e^{x^2} + (y-1)^2 > \sqrt{z^4 + 1} + 3\right\}$

(d) $A_4 := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; e^x - e^y < z\right\}$

Hinweis: Versuchen Sie, die Mengen mittels Satz 4.5.2 als Urbild offener/abgeschlossener Teilmengen unter stetigen Funktionen zu schreiben.

5.4. Stetige Fortsetzbarkeit

Seien A_1, A_2 Teilmengen von $\mathbb{R}^d$ und $f_1 : A_1 \to \mathbb{R}$ und $f_2 : A_2 \to \mathbb{R}$ zwei L-Lipschitz Funktionen (Lipschitz Funktionen je mit Konstant L) auf A_1 und A_2. Man nehme an, dass $f_1 = f_2$ auf $A_1 \cap A_2$ und man definiert $f : A_1 \cup A_2 \to \mathbb{R}$ via:

$$f = f_1 \text{ auf } A_1, \quad f = f_2 \text{ auf } A_2$$

Ist f auf $\overline{A_1 \cup A_2}$ stetig ergänzbar?

(a) Man betrachtet zuerst den Fall, dass A_1 und A_2 abgeschlossen sind und beweise, dass die Funktion in diesem Fall stetig fortsetzbar ist. Ist f in diesem Fall auch L-Lipschitz?

(b) Man gebe ein Gegenbeispiel für allgemeine A_1, A_2.

5.5. Abschluss und Inneres für Vereinigungen und Durchschnitte

Seien $(A_i)_{i\in I}$ Teilmengen von $\mathbb{R}^d$ und I eine Indexmenge.

(a) Vergleichen Sie $\cup_{i\in I} A_i$, $\cup_{i\in I} \overline{A_i}$, $\overline{\cup_{i\in I} A_i}$ und $\overline{\cup_{i\in I} \overline{A_i}}$. Kann man genauere Aussagen treffen, falls I eine endliche Indexmenge ist?

(b) Vergleichen Sie ebenfalls $\cap_{i\in I} A_i$, $\cap_{i\in I} \overline{A_i}$, $\overline{\cap_{i\in I} A_i}$.

(c) Vergleichen Sie $\cup_{i\in I} A_i$, $\cup_{i\in I} A_i^\circ$, $(\cup_{i\in I} A_i)^\circ$.

5.6. Online-Aufgaben

Abgabe der Multiple-Choice Aufgaben: Online auf Moodle.

Es sind jeweils mehrere Antworten möglich.

(a) Es seien $A_1, A_2 \subset \mathbb{R}^2$. Gilt die folgende Inklusion?

$$\overline{A_1 \cup A_2} \subset \overline{A_1} \cup \overline{A_2}$$

(i) Ja.

(ii) Nein.

(iii) Weiss nicht.

(b) Es seien $A_1, A_2 \subset \mathbb{R}^2$. Gilt die folgende Inklusion?

$$\overline{A_1 \cup A_2} \supset \overline{A_1} \cup \overline{A_2}$$

(i) Ja.

(ii) Nein.

(iii) Weiss nicht.

(c) Es seien $A_1, A_2 \subset \mathbb{R}^2$. Gilt die folgende Inklusion?

$$\overline{A_1 \cap A_2} \subset \overline{A_1} \cap \overline{A_2}$$

(i) Ja.

(ii) Nein.

(iii) Weiss nicht.

(d) Es seien $A_1, A_2 \subset \mathbb{R}^2$. Gilt die folgende Inklusion?

$$\overline{A_1 \cap A_2} \supset \overline{A_1} \cap \overline{A_2}$$

(i) Ja.

(ii) Nein.

(iii) Weiss nicht.