6.1. Gleichmässige Stetigkeit Sind die folgenden Funktionen auf den angegebenen Definitionsbereichen stetig? Sind sie gleichmässig stetig?

(a) $f(x) = \frac{1}{x}$ auf $]0, \infty[$

(b) $f(x) = \frac{1}{x}$ auf $[1, \infty[$

(c) $f(x) = \sqrt{x}$ auf $[0, 1]$

(d) $f(x) = e^{-x}$ auf $[0, \infty[$

(e) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ gegeben durch $f(x) = A \cdot x$, wobei A eine $m \times n$ Matrix ist.

(f) $f : [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\varphi(x)-\varphi(y)}{x-y}, & \text{falls } x \neq y \\ \varphi'(x), & \text{falls } x = y, \end{cases}$$

wobei $\varphi : [0, 1] \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion ist.

6.2. Komposition von Funktionen

Seien $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ stetige Funktionen.

(a) Benutzten Sie das Weierstrass'sche ϵ-δ- Kriterium (siehe Satz 4.5.1) um zu zeigen, dass die Komposition $g \circ f$ stetig ist.

(b) Falls f und g sogar Lipschitz stetig sind, mit Lipschitz Konstanten L_1 und L_2, ist dann auch $g \circ f$ Lipschitz stetig? Wenn ja, was ist die Lipschitz Konstante?

6.3. Beschränktheit und Stetigkeit

Sei $g : \Omega \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion, also

$$\sup_{x \in \Omega} |g(x)| < M,$$

für irgend ein $M \in [0, \infty[$. Wir definieren die Funktion

$$f(x) = (x - x_0)\, g(x),$$

wobei $x_0 \in \Omega$.

(a) Beweisen Sie, dass f an der Stelle x_0 stetig ist.

(b) Ist die folgende Funktion stetig auf $\mathbb{R}$?

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin(\frac{1}{x}) & \text{falls}\, x \neq 0 \\ 0 & \text{falls}\, x = 0 \end{cases}$$

6.4. Grenzwert versus iterierte Grenzwerte

Betrachten Sie die folgende Funktion auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$:

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

(a) Fixieren Sie ein $x \neq 0$ und betrachten Sie $f(x,y)$ als Funktion der Variable y. Existiert der Grenzwert $\lim_{y\to 0} f(x,y)$?

Wir können das Resultat als Funktion von x betrachten und den Grenzwert $x \to 0$ nehmen. Was ergibt dieser iterierte Grenzwert, also

$$\lim_{x\to 0} \lim_{y\to 0} f(x,y).$$

(b) Fixieren Sie nun $y \neq 0$ und betrachten Sie $f(x,y)$ als Funktion der Variable x. Existiert der Grenzwert $\lim_{x\to 0} f(x,y)$? Was ergibt der iterierte Grenzwert

$$\lim_{y\to 0} \lim_{x\to 0} f(x,y).$$

(c) Existiert der Grenzwert

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y).$$

Betrachten Sie nun die Funktion:

$$g(x,y) = \frac{xy}{x^2 + y^2},$$

wieder mit Definitionsbereich $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

(d) Berechnen Sie wie oben den iterierten Grenzwert

$$\lim_{x\to 0} \lim_{y\to 0} g(x,y).$$

(e) Berechnen Sie den iterierten Grenzwert

$$\lim_{y\to 0} \lim_{x\to 0} g(x,y).$$

(f) Betrachten Sie die Folge a_n in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ gegeben durch $a_n = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$. Was ist der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} g(a_n)$?

(g) Existiert der Grenzwert

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)?$$

6.5. Funktionenfolgen

Berechnen Sie, falls sie existieren, die punktweisen und die gleichmässigen Grenzwerte der folgenden Funktionenfolgen auf $\mathbb{R}$.

(a) $f_n(x) = \dfrac{1}{n(1+x^2)}$

(b) $g_n(x) = \dfrac{nx}{nx+1}$

(c) $h_n(x) = \dfrac{nx}{n+x}$

6.6. Online-MC

Abgabe der Multiple-Choice Aufgaben: Online auf Moodle.

Es sind jeweils mehrere Antworten möglich.

(a) Es sei:

$$f :]0,1] \to \mathbb{R}, f(x) := \sin(1/x)$$

Ist das Urbild von $[-1,0[$ unter f relativ offen in $]0,1]$?

(i) Ja

(ii) Nein

(iii) Kann man nicht sagen.

(b) Es sei:

$$f :]0,1] \to \mathbb{R}, f(x) := \sin(1/x)$$

Ist das Urbild von $]-1,0[$ unter f relativ offen in $]0,1]$?

(i) Ja

(ii) Nein

(iii) Kann man nicht sagen.

(c) Es sei:

$$f :]0,\infty[\to \mathbb{R}, f(x) := \sin(1/x)$$

Ist das Urbild von $[-1,0[$ unter f relativ offen in $]0,\infty[$?

(i) Ja

(ii) Nein

(iii) Kann man nicht sagen.

(d) Es sei:

$$f :]0,\infty[\to \mathbb{R}, f(x) := \sin(1/x)$$

Ist das Urbild von $]-1,0[$ unter f relativ offen in $]0,\infty[$?

(i) Ja

(ii) Nein

(iii) Kann man nicht sagen.