8.1. Kettenregel

Berechnen Sie für die gegebenen Funktionen f, g die Ableitung von $f \circ g$ gemäss der Kettenregel:

(a) $f(t) = t^3 e^{t^2} + t, \quad g(x, y) = \log(1 + x^2 y^2)$

(b) $f(x, y) = x^2 - y^2, \quad g(t) = (\cosh(t), \sinh(t))$

(c) $f(x, y) = \dfrac{x}{y^2 + 1}, \quad g(t) = (\log(1 + t^2), \cos(t))$

8.2. Wegintegrale

Berechnen Sie das Wegintegral

$$\int_\gamma \lambda$$

der Differentialform $\lambda : \mathbb{R}^3 \to L(\mathbb{R}^3; \mathbb{R})$ entlang der Kurve $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^3$:

(a) $\lambda(x, y, z) := 2xydx + zdy - z^2 ydz, \quad \gamma(t) := (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t), e^t)$

(b) $\lambda(x, y, z) := e^x ydx + xe^y dz, \quad \gamma(t) := (t, 1 - t, 1 + t^2)$

8.3. Differenzierbarkeit in konkreten Beispielen

Wir betrachten die folgenden fünf Funktionen:

(i) $f_1(x, y) := x^3 - 3y^2 x$

(ii) $f_2(x, y) := \dfrac{x^3 - 3y^2 x}{x^2 + y^2}$

(iii) $f_3(x, y) := \dfrac{x^3 - 3yx}{x^2 + y^2}$

(iv) $f_4(x, y) := \dfrac{3x^3 y}{3y^2 + 2x^4}$

(v) $f_5(x, y) := \dfrac{3x^3 y}{3y^4 + 2x^2}$

(a) Welche von diesen Funktionen sind an der Stelle $(0, 0)$ stetig ergänzbar?

(b) Welche unter den Funktionen, die an der Stelle $(0, 0)$ stetig ergänzbar sind, besitzen die partiellen Ableitungen in Richtung der Koordinatenachsen in $(0, 0)$?

(c) Welche von diesen Funktionen besitzen an der Stelle $(0, 0)$ Richtungsableitungen in jede beliebige Richtung?

(d) Welche von diesen Funktionen sind an der Stelle $(0,0)$ differenzierbar?

Hinweis: Studieren Sie zuerst die Beispiele auf der Wikipedia-Seite über Differenzierbarkeit: `https://de.wikipedia.org/wiki/Differenzierbarkeit`

8.4. Steilster Anstieg

Betrachten Sie die folgende Funktion:

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y,z) := xyz + 3e^x y$$

Bestimmen Sie die Richtung des stärksten Anstiegs von f im Punkt $(0,1,3)$ und $(2,-4,1)$. Geben Sie Ihre Antwort in der Form eines Vektors der Länge 1 an.

8.5. Kurvenintegrale und Wegintegrale

Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ stetig und sei $\gamma : [0,1] \to U$ differenzierbar. Wir definieren das *Kurvenintegral* von f entlang γ durch:

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)\,dz &= \int_0^1 f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt \\ &= \int_0^1 \Re\Big(f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\Big)\,dt + i\int_0^1 \Im\Big(f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\Big)\,dt\end{aligned}$$

(siehe Definition 2.35 im Vorlesungskript von Komplexe Analysis). Sei $\Phi : U \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $\Phi(z) := (\Re(z), \Im(z))$ und sei $D := \Phi(U) \subset \mathbb{R}^2$. Man beachte, dass Φ differenzierbar und invertierbar ist wie auch seine Umkehrunktion $\Psi : D \to U$, gegeben durch $\Psi(x,y) := x + iy$.

(a) Betrachten Sie die folgenden Differentialformen auf $D \subset \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &:= (\Re(f) \circ \Psi)dx - (\Im(f) \circ \Psi)dy, \\ \lambda_2 &:= (\Im(f) \circ \Psi)dx + (\Re(f) \circ \Psi)dy.\end{aligned}$$

Beweisen Sie, dass

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{\Phi\circ\gamma} \lambda_1 + i\int_{\Phi\circ\gamma} \lambda_2. \tag{1}$$

Bemerkung: Dies ist eine Repetition aus der Vorlesung.

(b) Nehmen wir nun an, dass die Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ eine Stammfunktion in U besitzt. Das heisst, es existiert eine holomorphe Funktion $g : U \to \mathbb{C}$, so dass

$$f(z) = \frac{d}{dz} g(z), \quad \forall\, z \in U.$$

Beachten Sie, dass die komplexe Ableitung bezüglich der Abbildung Ψ geschrieben werden kann als:

$$\Big(\frac{d}{dz} g\Big) \circ \Psi = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x}(f \circ \Psi) - i \frac{\partial}{\partial y}(f \circ \Psi)\Big).$$

Benutzen Sie die erste Teilaufgabe und den Satz 7.4.2 im Skript, um zu zeigen, dass

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 0,$$

für jeden geschlossenen Pfad $\gamma : [0, 1] \to U$.

Hinweis: Erinnern Sie sich, dass eine holomorphe Funktion die Cauchy-Riemann Gleichungen erfüllt:

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(\Re(g) \circ \Psi\Big) = \frac{\partial}{\partial y}\Big(\Im(g) \circ \Psi\Big)$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\Big(\Re(g) \circ \Psi\Big) = -\frac{\partial}{\partial x}\Big(\Im(g) \circ \Psi\Big)$$

(c) Sei $p(z)$ ein Polynom in z und sei $\gamma(t) := e^{2\pi i t}$, $\forall t \in [0, 1]$. Was ergibt das Kurvenintegral von p entlang γ?

(d) Betrachten Sie wieder den Pfad $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) := e^{2\pi i t}$. Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_\gamma \frac{1}{z}\, dz.$$

Besitzt die Funktion $f(z) = \frac{1}{z}$ eine Stammfunktion in $U = \{z \in \mathbb{C},\ \frac{1}{2} < |z| < 2\}$? Was impliziert dies für den Definitionsbereich des komplexen Logarithmus, $g(z) = \log(z)$?

8.6. Online-MC

Abgabe der Multiple-Choice Aufgaben: Online auf Moodle.

Es sind jeweils mehrere Antworten möglich.

(a) Welche der folgenden Aussagen sind korrekt? Wählen Sie alle zutreffenden aus!

(i) Wenn f an einer Stelle x_0 differenzierbar ist, so existieren an dieser Stelle auch alle Richtungsableitungen.

(ii) Wenn f an einer Stelle x_0 alle Richtungsableitungen besitzt, so ist die Funktion an dieser Stelle auch differenzierbar.

(iii) Existieren alle partiellen Ableitungen von f in Richtung der Koordinatenachsen in einer Umgebung eines Punktes x_0 und sind die partiellen Ableitungen stetig, dann ist f dort auch differenzierbar.

(iv) Wenn f differenzierbar ist in einer Umgebung eines Punktes x_0, so existieren dort auch die partiellen Ableitungen und diese sind in x_0 stetig.

(b) Welche der folgenden Aussagen treffen auf die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zu?

$$f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, \forall (x,y) \neq 0, \quad f(0,0) = 0$$

Wählen Sie alle zutreffenden aus!

(i) Die Funktion f ist stetig in $(0,0)$.

(ii) Die Funktion f besitzt in $(0,0)$ die partiellen Ableitungen in Richtung der Koordinatenachsen.

(iii) Die Funktion f besitzt in $(0,0)$ die partiellen Ableitungen in jede beliebige Richtung.

(iv) Die Funktion f ist in $(0,0)$ differenzierbar.