9.1. Potentiale

Bestimmen Sie für jede der folgenden Differentialformen auf Ω ein Potential oder beweisen Sie, dass kein solches existiert.

(a) $\lambda(x,y) := x dx + y e^{y^2} dy \quad$ auf $\Omega = \mathbb{R}^2$

(b) $\lambda(x,y) := \dfrac{-y}{x^2+y^2} dx + \dfrac{x}{x^2+y^2} dy \quad$ auf $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

(c) $\lambda(x,y) := \dfrac{x}{x^2+y^2} dx + \dfrac{y}{x^2+y^2} dy \quad$ auf $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

(d) $\lambda(x,y) := 4x^3 e^{y^2} dx + \left(2x^4 y e^{y^2} + \dfrac{1}{1+y^2}\right) dy \quad$ auf $\Omega = \mathbb{R}^2$

9.2. Anwendbarkeit des Satzes von Schwarz

Betrachten Sie die folgende Funktion auf $\mathbb{R}^2$:

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{auf } \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) Berechnen Sie die gemischten partiellen Ableitungen zweiter Ordnung, $\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} f(x,y)$ und $\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} f(x,y)$, für $(x,y) \neq (0,0)$.

(b) Beweisen Sie, dass die Funktion f von der Klasse C^1 ist auf $\mathbb{R}^2$.

(c) Zeigen Sie, dass die gemischten partiellen Ableitungen zweiter Ordnung, $\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} f(0,0)$ und $\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} f(0,0)$, existieren und berechnen Sie diese.

(d) Zeigen Sie, dass die gemischten partiellen Ableitungen zweiter Ordnung nicht stetig sind an der Stelle $(0,0)$. Ist der Satz von Schwarz (Satz 7.5.1) auf die Funktion f anwendbar?

Bemerkung: Dies zeigt, dass die gemischten partiellen Ableitungen zweiter Ordnung auch übereinstimmen können, obwohl der Satz von Schwarz nicht zutrifft. Dass f von der Klasse C^2 ist, ist also eine hinreichende Bedingung aber nicht eine notwendige.

9.3. Die Klassen $C^1(\mathbb{R}^2)$ und $C^2(\mathbb{R}^2)$

Betrachten Sie die folgende Funktion auf $\mathbb{R}^2$, welche von einem Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ abhängt:

$$f_\alpha(x, y) := \begin{cases} xy \cos\Big((x^2 + y^2)^\alpha\Big) & \text{auf } \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

(a) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt $f_\alpha \in C^1(\mathbb{R}^2)$?

(b) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt $f_\alpha \in C^2(\mathbb{R}^2)$?

Hinweis: Für Konvergenzfragen kann es nützlich sein, in Polarkoordinaten zu arbeiten, also $(x, y) = (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))$.

9.4. Online-MC

Abgabe der Multiple-Choice Aufgaben: Online auf Moodle.

Es sind jeweils mehrere Antworten möglich.

(a) Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

(i) Wenn eine Differentialform λ ein Potential f besitzt, so ist dieses eindeutig.

(ii) Jede Differentialform λ besitzt ein zugehöriges Potential in einer Umgebung jedes Punktes.

(iii) Wenn λ kein Potential besitzt, so existiert ein geschlossener Weg γ, d.h. mit gleichem Anfangs- und Endpunkt, sodass $\int_\gamma \lambda \neq 0$.

(iv) Es seien λ_1, λ_2 zwei Differentialformen auf $\mathbb{R}^n$ und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ C^1-Funktion mit $\lambda_2 = \lambda_1 + df$. Dann gilt für jede geschlossene Kurve γ: $\int_\gamma \lambda_1 = \int_\gamma \lambda_2$

(b) Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

(i) Wenn f eine C^1-Funktion auf $\mathbb{R}^n$ ist, so steht das Gradientenfeld ∇f stets senkrecht zu den Level-Mengen $M_c := \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = c\}$, für beliebiges $c \in \mathbb{R}$ mit $M_c \neq \emptyset$.

(ii) Das Gradientenfeld ∇f einer C^1-Funktion f zeigt in Richtung des stärksten Anstiegs von f.

(iii) Wenn ein Vektorfeld "rotiert", z.B. $v(x,y) = (-y/|(x,y)|, x/|(x,y)|)$, dann ist dieses Vektorfeld nicht konservativ.

(iv) Sei $v = (v_1, v_2)$ ein C^1-Vektorfeld auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Falls $\partial_y v_1 = \partial_x v_2$ gilt, so ist v konservativ.

(c) Sei f eine Funktion auf $\mathbb{R}^2$. Welche der folgenden Aussagen impliziert $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$?

(i) Die partiellen Ableitungen $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ existieren und sind stetig auf $\mathbb{R}^2$.

(ii) Die partiellen Ableitungen $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ existieren, sind stetig auf $\mathbb{R}^2$ und stimmen miteinander überein.

(iii) Die partiellen Ableitungen $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ existieren überall in $\mathbb{R}^2$.

(iv) Die partiellen Ableitungen $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ existieren und sind stetig in $\mathbb{R}^2$.