10.1. Taylorentwicklung in 2D

Wir betrachten die folgende Funktion:

$$f(x,y) := e^{x^2+y^2} + \log(1+x^2) + \arctan(xy)$$

(a) Warum ist $f \in C^m(\mathbb{R}^2)$ für alle $m \in \mathbb{N}$?

(b) Bestimmen Sie die Taylor-Entwicklung von f bis und mit dritter Ordnung um $(0,0)$.

(c) Bestimmen Sie die Taylor-Entwicklung 3.Ordnung in 0 der Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch:

$$g(x) := f(x,x)$$

Was ist der Zusammenhang zwischen der Taylor-Entwicklung von f und g?

10.2. Hesse-Matrizen

Man betrachte die folgenden Funktionen:

(a) $f_1(x,y) := \arctan(xy)$

(b) $f_2(x,y) := ye^{xy}$

(c) $f_3(x,y) := \log(1+x^2+y^2)$

(d) $f_4(x,y) := \frac{x}{2-e^{-y^2}}$

Bestimmen Sie die Hesse-Matrizen dieser Funktionen in $(0,0)$ und $(1,-1)$ und bestimmen Sie, ob diese positiv/negativ definit oder indefinit sind? Sind die Punkte $(0,0)$ respektive $(1,-1)$ lokale Extrema bzw. Sattelpunkte?

10.3. Kritische Punkte

Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y,z) := x^2 + ay^2 + z^2 - 4xy, \quad \forall\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,$$

für einen beliebigen Parameter $a \in \mathbb{R} \setminus \{4\}$. Berechnen Sie die kritischen Punkte von f, in Abhängigkeit des Parameters a, und stellen Sie fest, ob diese Punkte lokale Minima, lokale Maxima oder Sattelpunkte sind.

10.4. Online-MC

Abgabe der Multiple-Choice Aufgaben: Online auf Moodle.

Es sind jeweils mehrere Antworten möglich.

(a) Man betrachte die folgende Funktion:

$$f(x,y) := y^2 e^x$$

Man bemerke, dass $(0,0)$ ein kritischer Punkt ist. Welche Aussage ist hier zutreffend?

(i) Die Hesse-Matrix von f in $(0,0)$ ist positiv definit.

(ii) Die Hesse-Matrix von f in $(0,0)$ ist negativ definit.

(iii) Die Hesse-Matrix von f in $(0,0)$ hat positive und negative Eigenwerte.

(iv) Keine der Aussagen ist korrekt.

(b) Man betrachte die folgende Funktion:

$$f(x,y) := (x^2 + y^2)e^{xy}$$

Man bemerke, dass $(0,0)$ ein kritischer Punkt ist. Welche Aussage ist hier zutreffend?

(i) Die Hesse-Matrix von f in $(0,0)$ ist positiv definit.

(ii) Die Hesse-Matrix von f in $(0,0)$ ist negativ definit.

(iii) Die Hesse-Matrix von f in $(0,0)$ hat positive und negative Eigenwerte.

(iv) Keine der Aussagen ist korrekt.